EXERCICES SUR LES MOYENNES

(Niveau Terminale)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et p un entier supérieur ou égal à 1. À tout n-uplet $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de réels strictement positifs, on associe le réel $N_p(u)$, appelé **moyenne d'ordre *p*** de u, vérifiant : $N_p(u) = \sqrt[p]{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(u_k)^p}{n}}$

Ainsi, pour $p = 1$ (respectivement $p = 2$), on obtient la **moyenne arithmétique** (respectivement **quadratique**) de u.

<u>Le but de ce devoir est d'étudier quelques propriétés de cette moyenne.</u>

a) Montrer l'inégalité suivante : pour tout couple de réels (a ; b), pour tout nombre rationnel t de $]0 ; 1[$,
$a^t.b^{1-t} \le ta + (1-t)b$.

b) Lorsque p est un entier supérieur ou égal à 2, on appelle **conjugué** de p, noté p', le rationnel vérifiant : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Soit u et v deux n-uplets de réels strictement positifs, montrer alors l'**inégalité de Hölder**(1) :

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k v_k) \le n.N_p(u).N_{p'}(v).$$ [indication 1 ci-dessous]

c) Montrer que, pour $p = 2$, l'inégalité de Hölder devient l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**(2) :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(u_k v_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}(u_k)^2.\sum_{k=1}^{n}(v_k)^2.$$

d) On va maintenant redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sans utiliser l'inégalité de Hölder. On pose, pour tout réel x, $S(x) = \sum_{k=1}^{n}\left((u_k + xv_k)^2\right)$. Exprimer $S(x)$ comme un polynôme du second degré en x et utiliser le fait que la fonction S est toujours positive pour conclure.

e) Montrer maintenant l'**inégalité de Minkowski**(3) (généralisation de l'inégalité triangulaire) :

$$N_p(u+v) \le N_p(u) + N_p(v).$$ [indication 2 ci-dessous]

f) Redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz en prenant $p = 2$ dans l'inégalité de Minkowski.

g) On note sup(u) le plus grand des nombres du n-uplet u. Montrer que : $\lim_{p \to +\infty}\left(N_p(u)\right) = \sup(u)$. [indication 3 ci-dessous]

h) Grâce au a), on pose $\sup(u) = N_\infty(u)$, et, par définition, on dira que le « conjugué de ∞ » est 1. Après avoir expliqué la validité de cette définition, montrer que l'inégalité de Hölder est encore valable pour $p = 1$. Montrer enfin que l'inégalité de Minkowski est encore valable pour $p = \infty$.

<u>Indication 1</u> : On pourra appliquer a) n fois avec : $a = \left(\dfrac{u_k}{N_p(u)}\right)^p$, $b = \left(\dfrac{v_k}{N_{p'}(v)}\right)^{p'}$ et $t = \dfrac{1}{p}$.

<u>Indication 2</u> : Utiliser le fait que : $(u_k + v_k)^p = u_k.(u_k + v_k)^{p-1} + v_k(u_k + v_k)^{p-1}$ dans chacun des deux termes du membre de droite de l'inégalité de Hölder.

<u>Indication 3</u> : On pourra supposer que les u_k sont classés en ordre décroissant et qu'ainsi $\sup(u) = u_1$.

---

(1) *Otto Ludwig Hölder, allemand, 1859–1937*
(2) *Augustin-Louis Cauchy, français, 1789–1857 / Hermann Amandus Schwarz, allemand, 1843–1921*
(3) *Hermann Minkowski, allemand, 1864–1909*