

## EXERCICES SUR LES POLYNÔMES

**1 :** Déterminer un polynôme à coefficients **entiers** dont une des racines est :  $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**2 :** Si on développe  $(2x - 1)^{1995}$  selon les puissances décroissantes de  $x$ , on trouve :

$$ax^{1995} + bx^{1994} + cx^{1993} + \dots$$

Déterminer la valeur de  $a + b + c + \dots$

**3 :** Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts deux à deux. On pose :

$$P(x) = a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Exprimer  $P(x)$  sous la forme développée la plus simple possible.

**4 :** Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts deux à deux et non nuls. On pose :

$$P(x) = \frac{x(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{x(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{x(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)} - 1$$

Exprimer  $P(x)$  sous forme factorisée.

**5 :** Soit  $P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$ .

a) Montrer que si  $r$  est une racine de  $P(x)$ , alors  $\frac{1}{r}$  aussi.

b) Pour tout  $x$  réel non nul, on pose  $y = x + \frac{1}{x}$ . Montrer qu'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$ , à déterminer, tels que, pour tout  $x$  non nul :  $\frac{P(x)}{x^2} = ay^2 + by + c$ .

c) En déduire les racines de  $P(x)$ .

**6 :** Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $(x - 1)^2$  divise  $x^{n+1} + ax^n + b$  pour tout  $n$  entier strictement positif.

**7 :** Déterminer toutes les fonctions polynômes  $f$  définies sur  $\mathbf{R}$  telles que pour tout réel  $x$  :

$$f'(x)f''(x) = f(2x).$$

**8 :** Déterminer le polynôme  $P(x)$  de degré 4 (qui possède donc 4 racines, réelles ou complexes), satisfaisant aux conditions suivantes :

- le coefficient de  $x^4$  est 1
- $P(x)$  est divisible par  $x^2 - 2x + 5$
- la somme des quatre racines de  $P(x)$  vaut 1
- le produit des quatre racines de  $P(x)$  vaut  $-30$ .

**9 :** a) Déterminer le polynôme  $P(x)$  de degré 4 satisfaisant aux conditions suivantes :

- pour tout réel  $x$  non nul,  $P(x) = x^4 P\left(-\frac{1}{x}\right)$

- $P(x)$  est divisible par  $x - 1$
- le reste de la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x^2 + 1$  est  $2x + 1$ .

a) Montrer que  $P(x)$  est divisible par  $x + 1$ .

b) Déterminer toutes les racines de  $P(x)$

**10 :** Montrer que, pour tout entier  $n > 0$

$$P(x) = (x^{n+1} - 1)(x^n - 1)$$

est divisible par  $(x - 1)^2 (x + 1)$ .

**11 :** Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $(x - 1)^2$  divise  $x^{n+1} + ax^n + b$  pour tout  $n$  entier strictement positif.

**12 :** Déterminer les racines des polynômes

$$P(x) = 12x^4 + 92x^3 + 175x^2 + 66x - 45$$

$$\text{et } Q(x) = 18x^4 - 57x^3 - 76x^2 + 67x - 12$$

sachant qu'ils en ont deux en commun.

**13 :** Déterminer la plus petite valeur du réel  $k$  telle que : pour tout triplet  $(a ; b ; c)$  de réels,

$$(a + b + c)^2 \leq k(a^2 + b^2 + c^2).$$

**14 :** Déterminer tous les polynômes  $P(x)$  de degré 4, satisfaisant aux conditions suivantes :

- $P(x)$  est le carré d'un polynôme
- le polynôme  $P(x) - P(-x)$  est égal à  $4x(x^2 - 2)$
- le polynôme  $x^2 P(x^5) - (x^8 - 1) P(3x)$  est divisible par le polynôme  $x - 1$ .

**15 :** Déterminer à quelle condition sur l'entier  $n$  le polynôme  $P(x) = x^2 + x + 1$  divise le polynôme

$$Q(x) = (x + 1)^n - x^n - 1.$$

**16 :** a) Déterminer un polynôme  $P(x)$  de degré 5 tel que :

- $P(x) + 8$  soit divisible par  $(x + 1)^3$
- $P(x) - 8$  soit divisible par  $(x - 1)^3$

b) Terminer la factorisation de  $P(x) + 8$  et de  $P(x) - 8$ .

**17 :** Les restes respectifs de la division euclidienne d'un polynôme  $P(x)$  par  $x - 1$ ,  $x - 2$  et  $x - 3$  sont 3 ; 7 et 13. Déterminer le reste de la division de  $P(x)$  par  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ .

**18 :** Soit  $P(x)$  un polynôme.

Montrer que  $P(x) - x$  divise  $P(P(x)) - x$ .