EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL

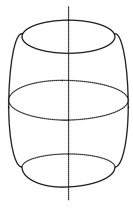
1) Soit m et n deux entiers positifs. Montrer que :

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \; dx = \frac{m!\; n!}{(m+n+1)!}$$

2) Déterminer un entier positif n tel que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}>1000$$

3) Un tonneau a la forme indiquée sur le dessin ci-contre :
C'est un solide de révolution autour de l'axe en pointillé. Son manteau a une forme parabolique. Le diamètre des bases est 60 cm et le diamètre du grand cercle central est de 90 cm.
La hauteur du tonneau est de 1,20 m.
Déterminer son volume en litre.



4) Calculs d'intégrales (*indications à la fin*)

a) Déterminer la valeur de $A=\int_0^1 \frac{3t^3+4t^2+3t+2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$.

b) Déterminer la valeur du réel $B=\int_1^2 \frac{dt}{e^t-e^{-t}}$.

c) Calculer, pour tout réel $k > 1$, $I_k=\int_1^k \frac{dt}{t\left(t^7+1\right)}$, puis la limite de I_k lorsque k tend vers $+\infty$.

d) Calculer $C=\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}\, dx$, puis

$D=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{cos^3 x}{1-2\,sin\,x}\, dx$, puis $E=\int_{-1}^0 t\;\; ln(1-2t)\;\; dt$

e) Calculer $F=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos\,x}{cos\,x+sin\,x}\, dx$

f) Calculer $G=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan\,x)^3 \;\; dx$.

g) Calculer $H=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^4 dx$, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^4 dx$ et

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 (\sin x)^2 dx$.

h) Calculer $K=\int_0^{\pi} e^x (cos\,x)^2\; dx$ et $L=\int_0^{\pi} e^x (sin\,x)^2\; dx$.

i) Déterminer la valeur de $M=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$,

puis de $N=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\,ln\,x}{\left(x^2+1\right)^2}\, dx$.

j) Calculer $P=\int_1^2 \cos(\ln x)\, dx$

k) Calculer $Q=\int_1^2 e^{\sqrt{x}}\, dx$

l) Calculer $R=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{3x}\; cos\,3x\; dx$ et $S=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{3x}\; sin\,3x\; dx$.

m) Calculer $T=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x\; cos^3 x\; dx$.

5) Utiliser le fait que $I=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$ pour calculer :

$J=\int_0^1 \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\, dt$, puis $K=\int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}$.

6) Déterminer la valeur du réel

$A=\int_1^e \left(27x^2-(20e)x-5\right)(ln\,x)^2\; dx$.

(On doit trouver un entier.)

7) Déterminer, après en avoir justifié l'existence, la valeur des intégrales suivantes :

$A=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t\,ln\,t}{\left(1+t^2\right)^2} dt \qquad B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1+\cos x) dx$

$C=\int_1^e x^3 (\ln x)^2 dx \qquad D=\int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x^2-6x+1\right) ln(1-x)\; dx$

8) Pour tout entier $n \geq 0$, on considère les intégrales :

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\; sin\,x\; dx$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\; cos\,x\; dx$.

Les deux parties de ce problème doivent être résolues de façon indépendante, donc aucun résultat de l'une ne doit être utilisé dans l'autre partie.

<u>Partie A</u> :

1) Calculer I_0 et J_0.

2) L'entier n est maintenant non nul. En intégrant par parties I_n et J_n, montrer que I_n et J_n vérifient le système : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$

En déduire, pour tout n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

c) Déterminer les limites de I_n et de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

<u>Partie B</u> :

On pose $f(x)=e^{-nx}\sin x$.

a) Montrer qu'il existe deux constantes a et b, que l'on déterminera, telles que la fonction F définie par :

$F(x)=e^{-nx}\left(a\sin x+b\cos x\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Retrouver ainsi la valeur de I_n.

9) Soit un entier $n > 1$ et un réel x de]0 ; 1[. On note :

$u_n(x)=\int_x^1 (\ln t)^n dt$. Justifier l'existence de $u_n(x)$ et déterminer son signe. Démontrer la formule suivante :

$u_{n+1}(x)=-x(\ln x)^{n+1}-(n+1)\,u_n(x)$.

a) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n > 1$, $u_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0.

b) On pose alors $v_n=\lim\limits_{x\to 0} u_n(x)$. Déterminer v_n en fonction de n.

10) On pose, pour tout n entier positif,

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}\ \cos t\ dt\ .$$

1) Montrer que la suite u ainsi définie est une suite géométrique.

2) Donner alors un sens à l'expression $U = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ \cos t\ dt$ et sa valeur.

Indications concernant l'exercice 4

a) Soit a, b et c trois réels. Déterminer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\sqrt{1+x^2}$.

b) Vérifier que, pour $x > 1$, $\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x+1}$.

c) Montrer qu'il existe deux réels a et b, à déterminer, tels que, pour tout réel t positif, $\dfrac{1}{t\left(t^7+1\right)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt^6}{t^7+1}$.

d) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel u différent de $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \dfrac{c}{2u-1}$

e) Poser $F' = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x}\ dx$ et calculer $F + F'$, puis $F - F'$, puis F (et accessoirement F').

f) Poser et calculer $G' = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\ dx$, puis calculer $G + G'$, puis enfin G.

g) Calculer successivement, grâce à des formules de trigonométrie, les valeurs de $H - I$, $H + I + 2J$ et $H + I - 6J$. En déduire les valeurs de H, I et J. (On pourra utiliser l'égalité : $u^2 + v^2 - 6uv = (u-v)^2 - 4uv$)

h) Calculer $K' = \int_0^{\pi} e^x\ \cos 2x\ dx$, puis calculer $K + L$ et $K - L$, et en déduire K et L.

i) Montrer l'existence et déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout x non nul, $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

j) Faire une intégration par parties avec $\cos(\ln x) = 1 \times \cos(\ln x)$.

k) Faire une intégration par parties avec $e^{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \times \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

l) Remarquer que $R + iS = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{3x}\left(\cos 3x + i \sin 3x\right) dx$.

m) On pourra utiliser les formules d'Euler, ou remarquer que : $\sin^4 x \cos^3 x = \left(\sin^4 x\left(1 - \sin^2 x\right)\right)\cos x$

Exercices sous forme de devoirs

I) Formules de Wallis et de Stirling

A) Soit $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour n entier > 0, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\ dt$

a) Calculer I_1 et I_2 . Montrer que : Pour tout entier $n \geq 0$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

b) On pose, pour tout entier $m \geq 1$,
$u_m = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \cdots \times \dfrac{2m-1}{2m}$.
Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, $I_{2m} = \dfrac{\pi}{2} u_m$ et
$I_{2m+1} = \dfrac{1}{(2m+1)u_m}$.

c) Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante.

d) En déduire que : Pour tout entier $m \geq 1$,
$\dfrac{2m+1}{2m+2} \times \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{1}{(2m+1)(u_m)^2} < \dfrac{\pi}{2}$.

e) Montrer que la limite en $+\infty$ de
$\dfrac{2}{1} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{3} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{6}{5} \times \dfrac{6}{7} \times \cdots \times \dfrac{2m}{2m-1} \times \dfrac{2m}{2m+1}$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

f) Grâce à A) c), déterminer la limite de $\sqrt{m} \times u_m$ lorsque m tend vers $+\infty$.

B) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \ln(n\,!)$. On pose :
$d_n = S_n - n \ln n + n - \dfrac{1}{2} \ln n$ et $w_n = d_{n+1} - d_n$.

a) Montrer que : pour tout entier $n \geq 1$,
$w_n = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a l'inégalité :
$\ln(1+x) \leq x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$

c) En déduire que : pour tout entier $n \geq 2$, $w_n \leq -\dfrac{1}{6n^2}$.

d) Soit pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et tout entier $n \geq 1$,
$H_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$. Comparer l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$, avec la somme des aires de rectangles de bases de longueur 1. Montrer que la suite H est majorée.
Démontrer alors qu'elle est convergente, vers un réel que l'on notera l et que l'on ne calculera pas.

e) Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, d_n comme somme de termes de la suite w, puis minorer d_n en utilisant la suite H. En déduire que d est minorée.

f) Étudier le signe sur $[1\,;+\infty[$ de la fonction f telle que : $f(x)=\dfrac{2}{2x+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

En déduire que d est décroissante, puis convergente. On note δ sa limite.

C) a) Pour tout entier $n > 0$, on pose $c_n=\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite c converge et exprimer sa limite γ en fonction de δ, défini au B) f). Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, $u_m=\sqrt{\dfrac{2}{m}}\times\dfrac{c_{2m}}{(c_m)^2}$.

b) Utiliser A) f) pour montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}=1$.

Quelques remarques historiques : La formule du A) d) est appelée **formule de Wallis** (John Wallis, anglais, 1616–1703). Cette formule, qu'il découvrit en 1655, fut la première donnant π comme limite d'une suite de nombres rationnels. Cependant, elle converge très lentement. La formule du C) b) est la **formule de Stirling** (James Stirling, anglais, 1692–1770). Découverte en 1730, elle permet un calcul approché de n ! pour n grand.

Question complémentaire : Faire un tableau dans lequel seront indiqués n, $n!$ et $\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, pour n multiple de 10 et compris entre 10 et 100. On pose, pour n et p entiers tels que $n \geq p \geq 0$, $\dbinom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Montrer que, pour tout entier $m\geq 1$, $u_m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}\dbinom{2m}{m}$.

En considérant une épreuve consistant à jeter une pièce de monnaie en l'air, définir un événement dont u_m serait la probabilité.

II) Volume d'un tore et Loi des Aires

L'objet de ce devoir est, dans un premier temps, de déterminer une primitive de la fonction $\left[t\mapsto\sqrt{r^2-t^2}\right]$, où r est un réel quelconque, puis ensuite d'utiliser ce résultat dans deux applications géométriques, l'une permettant le calcul du **volume d'un tore**, l'autre nommée la **loi des aires**.

Partie A.

a) Montrer que la fonction sinus est bijective de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $[0\,;1]$.

On notera Arcsin (lire « *arc sinus* ») son application réciproque.

b) Soit un réel $r > 0$, et soit F la fonction définie sur $[0\,;r[$ par : pour tout x de $[0\,;r[$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}}$.

c) Justifier l'existence de la fonction F. Justifier l'existence de la fonction G, définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

Pour tout a de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(a) = F(r \sin(a))$.

d) Montrer que G est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer G'. Montrer que, pour tout x de $[0\,;r[$, $F(x)=\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{x}{r}\right)$.

e) Montrer que l'on peut définir un prolongement $\widetilde{F}$ de F, continue en r.

f) Soit x un réel de $[0\,;r]$. On pose $I(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{r^2-t^2}\,dt$.

Après avoir justifié l'existence de la fonction I, montrer que, pour tout x de $[0\,;r]$,
$I(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\dfrac{r^2}{2}\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{x}{r}\right)$.

Partie B.

On appelle *tore* un solide de révolution obtenu en faisant tourner un cercle (C) autour d'un axe (D), (C) et (D) étant dans un même plan (P). Les notations seront les suivantes :

- l'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,
- le plan (P) sera le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$,
- la droite (D) sera l'axe $(O;\vec{i})$,
- le centre U de (C) aura pour coordonnées 0, R et 0,
- le cercle (C) aura pour rayon r (on choisira $R > r$),
- on notera A et B les deux points d'intersection de (C) avec $(O;\vec{j})$ (A sera d'ordonnée inférieure à celle de B), on notera enfin (D') la parallèle à $(O;\vec{i})$ passant par U.

a) Faire un dessin dans le plan (P).

b) Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant le cercle (C).

c) Déterminer un système d'équations définissant chacun des deux demi-cercles (C') et (C''), symétriques l'un de l'autre par rapport à (D') et contenant respectivement B et A. Exprimer alors l'ordonnée d'un point de chacun de ces ensembles en fonction de son abscisse.

d) Donner l'allure du solide obtenu en faisant tourner le demi-cercle (C') autour de (D'). Déterminer, sous la forme d'une intégrale, le volume de ce solide. Mêmes questions avec (C'').

e) Déterminer le volume du tore en fonction de r et R.

f) Dessiner la vue de dessus d'un tore (projection sur $(O;\vec{i},\vec{j})$, puis la vue de face (projection sur $(O;\vec{j},\vec{k})$).
Dessiner un tore en perspective (méthode au choix).

Partie C.

Soit a et b deux réels tels que $0 < b < a$. Soit f la fonction définie sur $[-a ; a]$ par :

pour tout x de $[-a ; a]$, $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

a) Étudier f avec a et b quelconques et tracer sa représentation graphique (E) avec $a = 3$ et $b = 2$.
Étudier en particulier la dérivabilité en a et la conséquence graphique du résultat obtenu.

b) Soit t et T deux réels fixés tels que $0 < t < t + T < \frac{\pi}{2}$.
Soit M et N les points de (E) d'abscisses respectives $a\cos(t)$ et $a\cos(t + T)$. On note m et n les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur $(O;\vec{i})$.
On cherche ici à calculer l'aire A du domaine délimité par les deux droites (OM) et (ON), et la courbe (E).
Faire un dessin avec $t = T = \frac{\pi}{6}$.

c) Montrer que A peut s'exprimer à l'aide des aires de deux triangles et d'une aire exprimable par une intégrale.

d) Montrer que : pour tout u de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\mathrm{Arcsin}(\cos u) = \frac{\pi}{2} - u.$$

e) Calculer alors A en fonction des données.

f) Énoncer la « *Loi des Aires* » ici démontrée.

III) Notion de produit scalaire, norme et orthogonalité avec les fonctions.

Pour tout couple $(f ; g)$ de fonctions continues sur $[0 ; 1]$, on définit le <u>produit scalaire</u> de f et de g par :

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt}$$

et la <u>norme</u> de f par : $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2\,dt}$.

a) Montrer l'existence de $\langle f, g\rangle$ et de $\|f\|$.

b) Pour tout réel k, on pose : $S(k) = \int_0^1 (f(t) + kg(t))^2\,dt$.

Développer $S(k)$ comme un polynôme du second degré en k, et utiliser, après l'avoir justifié, le fait que $S(k)$ est positif pour tout k, pour montrer que : $\langle f, g\rangle \le \|f\| \times \|g\|$.

c) Soit u et v deux fonctions continues sur $[0 ; 1]$. Montrer que $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$.

d) Soit un entier n. On définit sur $[0 ; 1]$ la fonction $f_n(x) = \sin(n\pi x)$. Montrer que la suite (f_n) est une suite orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (m ; n) \in \mathbb{N}^2$, $m \ne n \Rightarrow \langle f_m, f_n\rangle = 0$. Calculer, en fonction de n, la norme $\|f_n\|$.

IV) Limite de $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$

A) Soit u et v les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \text{ et}$$

$$v_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

1) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout entier $k \ge 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

b) Montrer que, pour tout $n \ge 1$, $v_n = \frac{2n}{n+1}$.

2) a) Montrer que, pour tout $n \ge 1$, $u_n \le v_n$.

b) En déduire que u est convergente.

3) Soit t un réel élément de $[0 ; \pi]$. On pose, pour tout entier $n \ge 2$, $C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$

a) Calculer le complexe $Z_n(t) = C_n(t) + i\,S_n(t)$.

b) En déduire que $C_n(0) = n$ et, pour tout t de $]0 ; \pi]$,

$$C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

c) L'application C_n, définie sur $[0 ; \pi]$ est-elle continue ?

2) a) Montrer que pour tout t de $]0 ; \pi]$,

$$1 + 2C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

b) Montrer que la fonction ϕ_n définie sur $]0 ; \pi]$ par :

$$\phi_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$ peut être prolongée par une fonction g_n, continue sur $[0 ; \pi]$.

3) Montrer que, pour tout entier $n \ge 1$,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos nt\,dt = \frac{1}{n^2}.$$

En déduire que : $u_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t)\,dt$.

4) a) Montrer que : $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \frac{\pi^2}{6}$,

b) Montrer que, pour tout entier $n \ge 1$,

$$\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t)\,dt.$$

C) On considère la fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(0) = 2$

et, pour tout t de $]0 ; \pi]$, $f(t) = \dfrac{t - \dfrac{t^2}{2\pi}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue.

b) En déduire l'existence d'un réel M tel que, pour tout t de $[0 ; \pi]$, $0 \leq f(t) \leq M$.

2) Soit α un réel fixé tel que $0 < \alpha < \pi$.

a) Montrer que, pour tout entier positif n,
$$\left| \int_0^\alpha f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2} \right) dt \right| \leq \alpha M.$$

b) Montrer que f est dérivable sur $[\alpha ; \pi]$ et que la dérivée f' est continue sur cet intervalle.

c) En déduire l'existence d'un réel N tel que, pour tout t de $[\alpha ; \pi]$, $|f'(t)| \leq N$.

d) On pose, pour tout entier positif n,
$I_n = \displaystyle\int_\alpha^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2} \right) dt$. Montrer que la suite I a une limite nulle en l'infini.

3) En déduire enfin que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

V) Limite de $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$

Soit u la suite définie par :

Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$

a) Calculer u_0.

b) Montrer que la suite u est strictement positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?

Montrer que : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$. (1)

c) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$. Quelle est la limite de la suite u ?

d) Grâce à l'égalité (1), exprimer en fonction de n le terme général de la suite u.

En déduire la limite de la suite v définie par :
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

VI) Fonction Gamma

Pour tout réel positif x, on pose $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} dt$ et, pour tout entier n strictement supérieur à 1,

$\boxed{I_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt}$.

1) Calculer $I_1(x)$ et déterminer sa limite, notée J_1, lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Montrer que, pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n > 0$,
$$I_{n+1}(x) = -x^n e^{-x} + nI_n(x)$$

3) Montrer par récurrence sur n que la fonction I_n, qui au réel x associe $I_n(x)$, admet une limite finie en $+\infty$, notée J_n.

4) Déterminer une relation entre deux termes consécutifs de la suite J.

5) Déterminer alors l'expression de J_n en fonction de n.

VII) Encadrement de π

On note I le réel suivant : $\boxed{I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} dt}$

1) Justifier l'existence de ce réel.

2) a) Déterminer le maximum de la fonction $[t \mapsto t(1-t)]$ sur $[0 ; 1]$.

b) On pose $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ et $f(x) = J(\tan x)$. Montrer que f est définie et dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) Calculer alors $f'(x)$.

d) En déduire f et montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

e) En utilisant les questions précédentes, montrer que : $I \leq \dfrac{\pi}{1024}$.

3) a) Montrer que, pour tout t de $[0 ; 1]$, $\dfrac{1}{1+t^2} \geq \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que $I \geq \dfrac{1}{1260}$.

4) a) Montrer l'existence du polynôme $P(x)$, de degré 6, et de la constante k, tels que :

pour tout réel t, $\dfrac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} = P(t) + \dfrac{k}{1+t^2}$.

b) En déduire que la valeur exacte de I est $\dfrac{22}{7} - \pi$.

5) Déduire de ce qui précède, un encadrement de π par des nombres rationnels.