Démonstration de $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}}$.

La fonction φ, définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une loi de densité (celle de la loi normale), car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1.$$

On va, pour cela, admettre les deux théorèmes suivants :

1) **Transformation d'une intégrale par changement de variable affine**
(généralisable, sous certaines conditions, à d'autres changements de variable) :
On pose $A = \int_a^b f(x)\,dx$, et soit le changement de variable $u = kx$, où u est la nouvelle variable et k un paramètre non nul. Alors on a : $A = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{u}{k}\right) du$. Propriété encore valable si a tend vers $-\infty$ ou si b tend vers $+\infty$.

2) **Calcul de la dérivée d'une fonction définie par une intégrale d'une fonction à deux variables** :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction de deux variables, continue sur $I \times [a\,;b]$
et si la dérivée par rapport à x de la fonction f, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, existe et est continue sur $I \times [a\,;b]$, alors la fonction F définie sur I
par $F(x) = \int_a^b f(x\,;t)\,dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x\,;t)\,dt$.

3) **Dérivée de la composée** : On rappelle par ailleurs que si u et v sont deux fonctions dérivables et que $v \circ u$ existe, alors $v \circ u$ est dérivable et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

A) On pose, pour tout réel x, $A(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ et, pour tout réel u de $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $h(u) = A(\tan u)$.

1) Montrer que h est dérivable sur I, calculer h' et en déduire h.

2) Déterminer alors la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$.

2) On pose, pour tout réel x, $g(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,du$. Déterminer une relation entre f', g et g'.

3) En déduire que pour tout réel x, $f(x) = \frac{\pi}{4} - (g(x))^2$.

4) Démontrer que, pour tout réel x, $0 \le f(x) \le \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$.

5) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Solution :

A) 1) h est dérivable d'après la propriété 3. Pour tout u de I, $h'(u) = A'(\tan u)\times \tan'(u)$. Or, pour tout x, $A'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

donc $h'(u) = \dfrac{1}{1+\tan^2 u}\times\left(1+\tan^2 u\right) = 1$. Donc $h(u) = u + C$, avec C constante. Or $h(0) = A(\tan 0) = A(0) = 0 = 0 + C$, donc $C = 0$. Ainsi, pour tout u de I, $A(\tan u) = u$.

2) Pour $u = \dfrac{\pi}{4}$, on a : $A(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

B) 1) f est dérivable d'après la propriété 2 et on a alors, pour tout réel x, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(-2x\left(1+t^2\right)\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right)dt =$

$\displaystyle\int_0^1 \left(-2xe^{-x^2}\, e^{-x^2t^2}\right)dt$. Utilisons la propriété 1 avec le changement de variable $u = tx$. On a alors

$f'(x) = \displaystyle\int_0^x \left(-2e^{-x^2}\, e^{-u^2}\right)du = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\, du$.

2) Si $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\, du$, alors $g'(x) = e^{-x^2}$ et $f' = -2g\times g'$.

3) En intégrant, on a : $f = -g^2 + C$, avec C constante réelle quelconque.

Donc $f(0) = -g^2(0) + C$. Or $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$, donc $C = \dfrac{\pi}{4}$. Pour tout x, $f(x) = -g^2(x) + \dfrac{\pi}{4}$.

4) Pour tous réels x et t, $-x^2t^2 \le 0$, donc $0 < e^{-x^2t^2} \le 1$.

Comme $\dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2} > 0$, on a : $0 < \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}e^{-x^2t^2} \le \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}$, *i.e.* $0 < \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \le \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}$, donc, comme $0 < 1$, on a :

$0 < \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}\,dt$ (propriété ordre et intégrale). Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}\,dt = e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = e^{-x^2}\times\frac{\pi}{4}$.

Donc on a bien : Pour tout réel x, $0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4}e^{-x^2}$.

5) Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, alors, grâce au théorème d'encadrement, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Or, pour tout réel x,

$f(x) = -g^2(x) + \dfrac{\pi}{4}$,

donc $g^2(x) = -f(x) + \dfrac{\pi}{4}$, et comme g est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$ (car intégrale d'une fonction positive avec les bornes dans le sens croissant), alors on a : $g(x) = \sqrt{-f(x) + \dfrac{\pi}{4}}$. On a donc, par opérations sur les limites et limite de composée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Comme la fonction $\left[x \mapsto e^{-x^2}\right]$ est paire, on a alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$. Pour obtenir l'intégrale souhaitée, faisons le changement de variable $x = u\sqrt{2}$. Les bornes restent inchangées et $dx = \sqrt{2}\,du$. On a donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2}}\,dx = \sqrt{\pi}$, soit enfin $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}}$.