COORDONNÉES & ÉQUATIONS

I) *Coordonnées et équations cartésiennes*

Abscisse et ordonnée

1) Coordonnées cartésiennes

Étant données une droite (*D*) et une direction (*d*) [ou encore une droite (*d*) dont on ne s'intéresse qu'à la direction, différente de celle de (*D*)], on appelle <u>*projection*</u> sur (*D*) parallèlement à (*d*) [ou de direction (*d*)] l'application qui, à tout point *M* du plan, associe le point *M'*, intersection de (*D*) avec la droite passant par *M* de direction (*d*). Soit *O* un point du plan, et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires. On note $\Re$ le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit un point *M* du plan. *m* étant le projeté de *M* sur $\left(O\,;\vec{i}\right)$ parallèlement à $\left(O\,;\vec{j}\right)$ et *m'* celui sur $\left(O\,;\vec{j}\right)$ parallèlement à $\left(O\,;\vec{i}\right)$, on a alors $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{Om'}=x\vec{i}+y\vec{j}$. *x* et *y* s'appellent respectivement l'<u>*abscisse*</u> et l'<u>*ordonnée*</u> de *M* dans le repère. Ce sont les <u>*coordonnées cartésiennes*</u> de *M*.
Si, de plus, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et normés (*i.e.* de norme 1), le repère est dit <u>*orthonormé*</u> ou <u>*orthonormal*</u> ; c'est dans ce cas que l'on se placera.

2) Équation cartésienne explicite

a) **Définition** : Une <u>*équation cartésienne explicite*</u> est la donnée de l'ordonnée *y* d'un point de la courbe en fonction de son abscisse *x* (ou le contraire).
On écrit la relation sous la forme $y = f(x)$, où *f* est une fonction numérique de la variable réelle (c'est-à-dire d'une partie de **R** vers **R**).

b) **Quelques exemples** :

(avec certaines conditions sur les constantes)

	Équation	Courbe
1	$y=\dfrac{K}{x^2+a^2}$	Agnésienne
2	$y=\dfrac{Kx}{x^2+a^2}$	Anguinéa
3	$y=\mathrm{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	Chaînette
4	$y=e^{-x^2}$	Courbe de Gauss
5	$y=ax^3+bx^2+cx+d$	Cubique
6	$y=mx+p$	Droite
7	$y=K\,e^{ax}$	Exponentielle
8	$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$	Hyperbole
9	$y=ax^2+bx+c$	Parabole
10	$y=e^{-kx}\sin(ax)$	Sinusoïde amortie
11	$y=\ln\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right)-\sqrt{1-x^2}$	Tractrice
12	$y=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x}$	Trident de Newton

3) Équations cartésiennes implicites

a) **Définition** : Une <u>*équation cartésienne implicite*</u> est une relation entre l'abscisse *x* et l'ordonnée *y* d'un point de (*C*), mais pas sous la forme « *y* fonction de *x* » ou réciproquement. On écrit la relation sous la forme $f(x\,;y)=0$, où *f* est ici une fonction à deux variables, d'une partie de **R** × **R** vers **R**.

b) **Propriétés**

Une courbe définie par une équation cartésienne implicite est très souvent difficile à étudier sous cette forme.

Voici quelques exemples de transformations possibles :

- On pourra essayer d'exprimer l'équation sous forme explicite $y=f(x)$, ou encore sous la forme $x=f(y)$. Dans ce dernier cas, on pourra étudier la fonction *f* comme si l'équation apparaissait sous la forme $y=f(x)$, puis on fera subir à la courbe ainsi obtenue une réflexion d'axe la droite d'équation $y=x$ pour obtenir la courbe souhaitée. En effet, cette réflexion (ou encore appelée symétrie axiale orthogonale) a comme caractéristique de permuter l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Ses <u>*équations*</u> sont $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$.
Ainsi, les deux courbes d'équations respectives $y=f(x)$ et $x=f(y)$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y=x$. Lorsque les vecteurs de base sont de même longueur, on appelle cette droite la « première bissectrice ».
- Il arrive aussi qu'avec certaines courbes « classiques », on puisse écrire l'équation cartésienne implicite sous la forme $y^2=f(x)$, ou encore $x^2=f(y)$. Dans le premier cas, on pourra considérer la courbe comme la <u>réunion des deux courbes</u> d'équations cartésiennes explicites respectives $y=\sqrt{f(x)}$ et $y=-\sqrt{f(x)}$, qui sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Dans le deuxième cas, on se ramène au premier cas, en étudiant la courbe d'équation $y^2=f(x)$, puis on effectue la réflexion citée précédemment.

c) **Quelques exemples** :

	Équation	Courbe
13	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$	Astroïde
14	$x^4\left(x^2+y^2\right)=\left(x^2-1\right)^2$	Atriphtaloïde
15	$\left(x^2+y\right)^2=x^2-y^2$	Besace
16	$y^2\left(1-x^2\right)=\left(x^2+2y-1\right)^2$	Bicorne

17	$y^2\left(x^2+y^2\right)=ax^2$	Cappa
18	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	Cercle
19	$y\left(x^2+y^2\right)=x^2$	Cissoïde de Dioclès
20	$x^2\left((x-a)^2+y^2\right)=b^2$	Conchale
21	$\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=1$	Cruciforme
22	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	Ellipse
23	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	Hyperbole
24	$\left(x^2+y^2+1\right)^2=4x^2+4a$	Ovale de Cassini
25	$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$	Parabole divergente
26	$x^4-ax^3+y^2=0$	Quartique piriforme
27	$x\left(x^2+y^2\right)=x^2-y^2$	Strophoïde droite
28	$x\left(x^2+y^2\right)=3x^2-y^2$	Trisectrice de Mac-Laurin

4) Équations paramétriques (cartésiennes)

a) **Remarque** : Cette notion est issue de la cinématique du point ; et ici t est le temps.
Le point M a ses coordonnées x et y variant en fonction de t, donc sont considérées comme fonctions de t.

b) **Définition** : Un *système d'équations paramétriques cartésiennes* est un système donnant x et y comme fonctions d'un *paramètre* t : $\begin{cases} x=u(t) \\ y=v(t) \end{cases}$, $t\in I$,
t étant un élément de I, inclus dans **R**, et u et v deux fonctions de I vers **R**.

c) **Exemple** : $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$, $t\in \mathbf{R}$ forme un système d'équations paramétriques (d'ellipse, *voir courbe* 22).
Une équation cartésienne implicite de cette courbe est $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, et cette courbe peut être considérée comme la réunion des deux courbes d'équations explicites : $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ et $y=-\dfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$

d) **Propriétés** :
À partir d'une équation cartésienne explicite du type $y=f(x)$, on peut déterminer un système d'équations cartésiennes paramétriques, dont l'exemple le plus simple est : $\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$, $t\in I$.

- Dans l'autre sens, c'est parfois plus difficile. Il faut et il suffit pour cela d'*éliminer* t entre x et y. Il est indispensable cependant de vérifier que l'on a bien raisonné par équivalence, c'est-à-dire qu'après cette élimination, on a bien la même courbe, et non pas seulement pour l'une une partie de l'autre, ou encore une autre courbe en plus.

e) **Applications** : Considérons le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=t+2 \\ y=1-2t \end{cases}$, $t\in \mathbf{R}$.

- Après élimination de t entre les deux lignes, on a : $y=5-2x$, qui est une équation cartésienne explicite d'une droite.
- Considérons le système : $\begin{cases} x=\cos\alpha+2 \\ y=1-2\cos\alpha \end{cases}$, $\alpha\in \mathbf{R}$.
  Après élimination de α, par l'intermédiaire de $\cos\alpha$ entre les deux lignes, on a aussi : $y=5-2x$; cependant, $\cos\alpha$ prenant ses valeurs dans $[-1\ ;\ 1]$, tous les points de cette droite ne sont pas atteints, mais seulement ceux du segment $[AB]$, avec $A(1\ ;\ 3)$ et $B(3\ ;\ -1)$.
- On a ici la *paramétrisation* du segment $[AB]$. On dit que la droite d'équation $y=5-2x$ est un *support* de la courbe.
- Il arrive aussi que l'on puisse transformer une équation cartésienne implicite en un système d'équations cartésiennes paramétriques, en cherchant l'éventuelle intersection de la courbe avec la droite passant par O et de coefficient directeur t, c'est-à-dire la droite d'équation $y=tx$:
- Le système $\begin{cases} f(x\ ;\ y)=0 \\ y=tx \end{cases}$, $t\in \mathbf{R}$ permet parfois de se ramener à $\begin{cases} x=u(t) \\ y=v(t) \end{cases}$, $t\in \mathbf{R}$, où u et v sont deux fonctions de la variable t, celle-ci étant appelée le *paramètre*, d'où le nom d'équations paramétriques.
- Appliquons ces deux méthodes à l'exemple de la cissoïde droite (ou cissoïde de Dioclès), d'équation $x\left(x^2+y^2\right)-2y^2=0$.
- $y^2=\dfrac{x^3}{2-x}$, d'où l'étude de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}$, et de la fonction $-f$...
- $\begin{cases} x\left(x^2+y^2\right)-2y^2 \\ y=tx \end{cases}$, $t\in \mathbf{R}$ s'écrit $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t^3}{1+t^2} \end{cases}$, $t\in \mathbf{R}$

f) **Quelques exemples** :

Les paramètres varient dans **R**, l'écriture est parfois horizontale pour des raisons de place.

	Équation	Courbe
29	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	Astroïde
30	$\begin{cases} x = \dfrac{a+t}{\left(1+t^2\right)^2} \, ; \, y = tx \end{cases}$	Bifolium
31	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$	Cardioïde
32	$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$	Cercle
33	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t^2} \, ; \, y = \dfrac{1}{t\left(1+t^2\right)} \end{cases}$	Cissoïde de Dioclès
34	$\{ x = \cos\theta \, ; \, y = \tan\theta$	Conchoïde de Külp
35	$\begin{cases} x = a + b\cos t \\ y = a\tan t + b\sin t \end{cases}$	Conchoïde de Nicomède
36	$\begin{cases} x = 1 - a\sin t \\ y = t - a\cos t \end{cases}$	Cycloïde
37	$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$	Deltoïde
38	$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$	Développante de cercle
39	$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \, ; \, y = tx \end{cases}$	Folium de Descartes
40	$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2} \, ; \, y = tx \end{cases}$	Lemniscate de Bernoulli
41	$\begin{cases} x = a\cos^2 t + \cos t \\ y = a\sin t\cos t + \sin t \end{cases}$	Limaçon de Pascal
42	$\begin{cases} x = 3\sin t - \sin 3t \\ y = 3\cos t - \cos 3t \end{cases}$	Néphroïde
43	$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \, ; \, y = tx \end{cases}$	Strophoïde droite
44	$\begin{cases} x = \cos t + \ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right) ; \, y = \sin t \end{cases}$	Tractrice
45	$\begin{cases} x = \dfrac{3-t^2}{1+t^2} \, ; \, y = tx \end{cases}$	Trisectrice de Mac-Laurin

5) Équation tangentielle *(cartésienne)*

a) **Définition** : Une courbe (C) admettant en chacun de ses points une tangente dont l'équation est de la forme $ux + vy + w = 0$, on appelle <u>*équation tangentielle*</u> de (C) une relation caractéristique entre u, v et w vérifiée par toutes les tangentes de (C).

b) **Détermination** : Si la courbe (C) a pour équation cartésienne implicite $F(x\,;\,y) = 0$, on définit des <u>*coordonnées homogènes*</u> $(x';y';z')$ telles que $x = \dfrac{x'}{z'}$ et $y = \dfrac{y'}{z'}$. On forme alors $G(x'\,;\,y'\,;\,z') = F(x\,;y) = 0$, puis on élimine x', y' et z' dans le système :

$$\begin{cases} ux' + vy' + cz' = 0 \\ \dfrac{u}{\frac{dG}{dx}} = \dfrac{v}{\frac{dG}{dy}} = \dfrac{w}{\frac{dG}{dz}} \end{cases}$$

, en prenant, après dérivation, $z = 1$. On appelle <u>*équation tangentielle*</u> la relation entre u, v et w ainsi obtenue.

c) **Quelques exemples** :

Équation	Courbe
$\dfrac{1}{u^2} + \dfrac{1}{v^2} = \dfrac{1}{w^2}$	Astroïde
$27w\left(u^2+v^2\right) = 2(u+v)^3$	Cardioïde
$\left(u\alpha + v\beta + w\right)^2 = R^2\left(u^2+v^2\right)$	Cercle
$w^2\left(u^2+v^2\right) = \left(p\left(u^2+v^2\right) + uw\right)^2$	Cubique de Tschirnhausen
$w\left(u^2+v^2\right) = u\left(u^2 - 3v^2\right)$	Deltoïde

6) Équation différentielle *(cartésienne)*

a) **Définition** : *Voir polycopié* « *Équations différentielles* ».

b) **Quelques exemples :**

Équation	Courbe
$x\,(y')^3 + y = 0$	Astroïde
$\left(x^2 + 2y^2\right)x\,y' = y^3$	Cappa
$y^3 + 3x^2y = 2x^3y'$	Cissoïde de Dioclès
$a^2\sqrt{1+y'^2} = b^2 - y^2$	Corde à sauter
$xy'' = k\sqrt{1+y'^2}$	Courbe de poursuite
$y' = \sqrt{\dfrac{2R-y}{y}}$	Cycloïde droite
$\left(x + yy'\right)^2 = a^2\left(1 + y'^2\right)$	Développante de cercle
$y^2\left(1+y'^2\right) = a^2y'^2$	Tractrice

7) Équations complexes

a) **Définition** : Un point M de coordonnées $(x\,;y)$ peut être aussi défini par son affixe $z = x + iy$, qui est un nombre complexe.

Donc les notions vues précédemment peuvent être « traduites » en complexes.

b) **Quelques exemples** :

Équation	Courbe
$z = a\left(2e^{it} - e^{2it}\right)$	Cardioïde
$z = \frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3}e^{-2it}$	Deltoïde
$a\,z + b\,\bar{z} = c$	Droite
$\lvert z - z_0\rvert = R$	Cercle
$\lvert z - a\rvert = \lvert z - b\rvert$	Droite (médiatrice)

II) Coordonnées et équations polaires

Distance à l'origine et angle polaire

1) Coordonnées polaires

a) **Définition** : Soit O un point du plan, et $\vec{i}$ un vecteur normé, c'est-à-dire de norme 1. Soit un point M du plan. Si M est distinct de O, on note α l'une des mesures de l'angle $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$; on l'appelle l'*angle polaire* de M. On note $r = OM$ la distance de O à M.

- On appelle *coordonnées polaires* l'un des couples : $(r\,;\theta)$ ou $(-r\,;\theta+\pi)$, avec $\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$.
- On a donc : $\overrightarrow{OM} = r\left((\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}\right)$.

b) **Relations entre les systèmes de coordonnées cartésienne et polaires** :

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- si $x = y = 0$, alors α n'est pas défini, et $r = 0$
- si $x = 0$ et $y > 0$, alors $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et $r = y$
- si $x = 0$ et $y < 0$, alors $\theta \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et $r = -y$
- si $x \neq 0$, alors $\theta \equiv \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \pmod{2\pi}$

2) Équation polaire explicite

a) **Définition** : Une *équation polaire explicite* est la donnée de la distance à l'origine r d'un point de la courbe en fonction de son angle polaire θ (ou le contraire). On écrit la relation sous la forme $r = f(\theta)$, où f est une fonction numérique de la variable réelle.

b) **Quelques exemples** :

	Équation	Courbe
46	$r = \cos^2\theta\left(a\cos\theta + b\sin\theta\right)$	Bifolium
47	$r = \cot\theta$	Cappa
48	$r = 1 + \cos\theta$	Cardioïde
49	Cas général : $r^2 + ar\cos\theta + br\sin\theta + c = 0$ si O est sur le cercle : $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ si le centre est l'origine du repère : $r = R$	Cercle
50	$r = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$	Cissoïde de Dioclès
51	$r = \frac{\sin\theta}{\theta}$	Cochléoïde
52	$r = \frac{1}{\cos\theta} + b$	Conchoïde de Nicomède
53	$r = \frac{1}{1 + \lambda e^{-k\theta}}$	Courbe du spiral
54	$r = \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^{-3}$	Cubique de Tschirnhausen
55	$r = \frac{1}{\sin(n\theta)}$, n entier	Épis
56	$r = \sqrt{\cos(2\theta)}$	Lemniscate de Bernoulli
57	$r = a\cos\theta + b$	Limaçon de Pascal
58	$r = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$	Lituus
59	$r = \cos^3\theta$	Ovoïde
60	$r = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$	Parabole
61	$r = a\sin(2\theta)$	Rosace à quatre feuilles
62	$r = \sin(3\theta)$	Rosace à trois feuilles
63	$r = \cos(2\theta) - a\cos(\theta)$	Scarabée
64	$r = \theta$	Spirale d'Archimède
65	$r = \frac{1}{\theta}$	Spirale hyperbolique
66	$r = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$	Strophoïde droite
67	$r = \cos\theta\left(\cos 2\theta + b\sin^2\theta\right)$	Trifolium
68	$r = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}$	Trisectrice de Mac-Laurin

3) Équation polaire implicite

a) **Définition** : Comme pour les équations cartésiennes, ici r et θ sont en relation sous la forme $f(r\,;\theta)=0$, où f est ici une fonction à deux variables, d'une partie de **R** × **R** vers **R**.

b) **Quelques exemples**

	Équation	Courbe
69	$r^2 = 49 + \dfrac{1}{\cos(2\theta)}$	Courbe du diable
70	$r^2\cos(2\theta) = a^2$	Hyperbole équilatère
71	$r^4 - (2\cos(2\theta))r^2 + 1 - k^4 = 0$	Ovale de Cassini
72	$r^2 = \cot(2\theta)$	Quartique régulière
73	$r^2 = \theta$	Spirale de Fermat

III) Coordonnées et équations intrinsèques

Abscisse curviligne et rayon de courbure

1) Coordonnées intrinsèques

a) **Définitions** : On oriente la courbe (C). A étant un point fixé de (C), on appelle <u>abscisse curviligne</u> (notée s) du point M de (C) la <u>distance algébrique</u>, notée $\overset{\frown}{AM}$, calculée de A à M, sur (C), réel positif si on va de A à M dans le sens défini par l'orientation choisie, et réel négatif sinon.

- On définit aussi le <u>cercle de courbure</u>**,** ou <u>cercle osculateur</u> au point M de la courbe (C), comme le cercle qui « épouse le mieux » cette courbe au voisinage de M, dans le même esprit que la tangente se définit grâce à la « meilleure approximation affine ».

Pour information : Si la courbe (C) admet pour équations paramétriques cartésiennes $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

où x et y sont des fonctions au moins deux fois dérivables, et si on pose $\alpha = \left(\vec{i}\,;\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)$, alors le <u>*centre K du cercle de courbure*</u>, appelé <u>*centre de courbure*</u> relatif à M, de paramètre t, a pour coordonnées $x - \dfrac{dy}{d\alpha}$ et $y + \dfrac{dx}{d\alpha}$, ou encore

$$K\left(x - y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}\,;\,y + x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}\right).$$

- On appelle alors <u>rayon de courbure</u> relatif à M, noté ρ et valant donc KM, le rayon de ce cercle.
- On montre que $\rho = \dfrac{ds}{d\alpha}$.
- La <u>courbure</u> de la courbe au point M est alors $\dfrac{1}{\rho}$.

Remarque : Le mot « intrinsèque » signifie « non lié à un repère », mais seulement lié à des notions liées à la courbe (même si, ici, on les a définies grâce à un repère).

b) **Propriétés**

- On a : $\rho = \dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'}$ et $s = \displaystyle\int_a^b \left(x'^2+y'^2\right)dt$

  avec A et M ayant pour paramètres respectifs a et b.

  [Toutes ces dérivées se font par rapport à t.]
- $dx = ds\cos\alpha$, $dy = ds\sin\alpha$
- $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ ou encore $x'^2 + y'^2 = s'^2$

2) Équation intrinsèque explicite

a) **Définition** : Une <u>*équation intrinsèque explicite*</u> est la donnée du rayon de courbure ρ en un point de la courbe en fonction de son abscisse curviligne s (ou éventuellement le contraire). On écrit la relation sous la forme $\rho = f(s)$, où f est une fonction numérique de la variable réelle.

b) **Quelques exemples**

Équation	Courbe
$\rho = 1 + s^2$	Chaînette
$\rho = a\,ch\left(\dfrac{s}{a}\right)$	Chaînette d'égale résistance
$\rho = \dfrac{1}{s}$	Clothoïde
$s = \rho^2$	Développante de cercle
$s = \ln\left(\dfrac{\rho^2}{4} + 1\right)$	Tractrice

3) Équation intrinsèque implicite

a) **Définition** : Comme pour les types d'équations précédentes, ici s et ρ sont en relation sous la forme $f(s\,;\rho) = 0$, où f est ici une fonction à deux variables, d'une partie de **R** × **R** vers **R**.

b) **Quelques exemples** :

Équation	Courbe
$\rho^2 + 4s^2 = 9a^2$	Astroïde
$9\rho^2 + s^2 = 64a^2$	Cardioïde
$\rho^2 + s^2 = 16R^2$	Cycloïde droite

IV) Coordonnées et équations barycentriques

Voir le polycopié « Quelques propriétés du triangle »