EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS LES SCIENCES

Loi fondamentale de la dynamique du solide :

$$m \times \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \sum \vec{f}$$

ORDRE 1 : *y' = ay + b*

Circuit RC :
Décharge d'un condensateur C dans une résistance R :

$$i = \frac{dq}{dt}, \; u = \frac{q}{C} \text{ et } Ri = -u$$

donc : $\boxed{\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{RC} = 0}$

<u>Solution</u> : $q(t) = q(0)\, e^{-\frac{t}{RC}}$

Désintégration du radium :
Le radium a une vitesse de désintégration proportionnelle à sa masse m qui vérifie donc :

$$\boxed{m' = km}$$

où k est un réel fixé.

<u>Solution</u> : $m(t) = m(0)\, e^{kt}$

Dissolution du sucre :
Le sucre se dissout dans l'eau à une vitesse proportionnelle à la quantité non encore fondue :

$$\boxed{d' = k(m - d)}$$

<u>Solution</u> : $d(t) = m + C\, e^{-kt}$,
avec C constante dépendant des conditions initiales

Chute d'un parachutiste :
m est la masse du parachutiste et de son matériel.
La vitesse de chute du parachutiste entre le moment où il ouvre son parachute et celui où il touche le sol, notée v, vérifie :

$$\boxed{mv' + kv = mg}$$

où g est l'accélération de la pesanteur et k le coefficient de résistance à l'air.

<u>Solution</u> : $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

Vitesse de refroidissement d'un corps :
La vitesse V de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température du corps T et celle du milieu ambiant T_0, c'est-à-dire :

$$V = \boxed{T' = k(T - T_0)}$$

<u>Solution</u> : $T(t) = T_0 + C\, e^{kt}$,
avec C constante dépendant des conditions initiales

ORDRE 2 : *y'' + py' + qy = r*

Circuit RLC :
q est la charge du condensateur, C la capacité et L l'inductance de la bobine.

On a : $i = \dfrac{dq}{dt}$, $u_{MN} = \dfrac{q}{C}$ et $u_{NM} = L\dfrac{di}{dt} + Ri = -\dfrac{q}{C}$

donc q vérifie l'équation différentielle :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

ou encore $\boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$

avec les notations : $\lambda = \dfrac{L}{2R}$ constante d'amortissement,

et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre du circuit.

Freinage d'un disque :
La vitesse angulaire d'un disque, notée v, vérifie :

$$\boxed{v'' = kv}$$

Mouvement d'un pendule de torsion :
Moment d'inertie J, élongation angulaire θ,
constante de torsion C, couple de freinage $-B\dfrac{d\theta}{dt}$.

θ vérifie : $\boxed{J\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + B\dfrac{d\theta}{dt} + C\theta = 0}$

Mouvement d'un ressort :
Objet de masse m accroché à un ressort de masse négligeable. k raideur du ressort.
$x(t)$ longueur du ressort à l'instant t.

x vérifie : $\boxed{m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$.

Mouvement d'un pendule pesant :
$J\alpha'' + mga\sin(\alpha) = 0$
Lorsque les oscillations sont de faible amplitude, c'est-à-dire α « petit », on remplace $\sin(\alpha)$ par α et l'équation devient alors :

$$\boxed{J\alpha'' + mga \times \alpha = 0}$$