Baccalauréat S Centres étrangers 12 juin 2013

EXERCICE 1 **4 points**

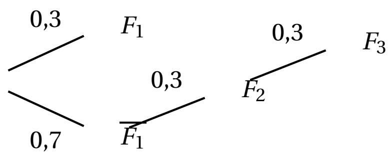
Commun à tous les candidats

Partie A

1. La durée de vie moyenne d'une vanne est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire T.
$E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}0002} = 5000$ (h).
2. On calcule $p(T > 6000) = \mathrm{e}^{-6000\lambda} = \mathrm{e}^{6000\times 0{,}0002} = \mathrm{e}^{-1{,}2} \approx 0{,}301$.

Partie B

1.



2. On a $P(E) = P(F_1) + P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3\right) =$
$P(E) = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}3 + 0{,}063 = 0{,}363$.
3. Il faut calculer $P_E(F_1) = \dfrac{P(E \cap F_1)}{P(E)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}363} \approx$
$0{,}8264 \approx 0{,}826$ (au millième).

Partie C

1. Les conditions :
   - $n = 400 \geqslant 30$;
   - $np = 8 > 5$;
   - $n(1-p) = 392 > 5$

   sont bien réalisées. Danc ces conditions on sait que l'intervalle de fluctuation à 95 % est égal à :
   $I_{400} = \left[0{,}02 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}02\times 0{,}98}}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}02 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}02\times 0{,}98}}{\sqrt{400}}\right] = [0{,}00628\ ;\ 0{,}03372]$
2. La fréquence observée est égale à $\dfrac{10}{400} = 0{,}025$ et $0{,}0025 \in I_{400}$.
L'affirmation de l'industriel ne peut être remise en cause.

Partie D

1. La calculatrice permet de trouver :
$P(760 \leqslant D \leqslant 840) =\approx 0{,}683$.
2. $P(D \leqslant 880) = \dfrac{1}{2} + P(800 \leqslant D \leqslant 880) \approx 0{,}5 + 0{,}477 \approx 0{,}977$.
3. On a $P(D > 880) = 1 - P(D \leqslant 880) \approx 0{,}023$ soit à peu près 2,3 %, soit beaucoup plus que 1 %.
L'industriel a tord.

Exercice 2 4 points

Commun à tous les candidats

Affirmation 1

Un vecteur normal au plan P a pour coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$.
Un vecteur normal au plan dont une équation est $2x + y + 2z - 24 = 0$ a pour coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le s plans ne sont pas parallèles.
Affirmation fausse.

Affirmation 2

Pour $t = -1$ on trouve les coordonnées de A et pour $t = 3$ celles de C.
Affirmation vraie.
Affirmation 3

La droite (DE) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{DE}}\,(5\,;\,-4\,;\,3)$ et on a vu que $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,1\,;\,-2)$ est un vecteur normal au plan P.
Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{DE} = 10-4-6=0$, donc la droite (DE) est parallèle au plan P. Comme les cordonnées de E ne vérifient pas l'équation de P ($4+7+12-5=0$ est une égalité fausse, la droite (DE) est strictement parallèle au plan (P).
Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).
Affirmation fausse.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** Soit G la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $G(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur cet intervalle et $G'(x) = 1-(-\mathrm{e}^{-x}) = 1+\mathrm{e}^{-x}$: c'est donc une primitive de g.
   Donc $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^a = \left[x-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a = a-\mathrm{e}^{-a}-\left(0-\mathrm{e}^{-0}\right) = a+1-\mathrm{e}^{-a}$.
   b. $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_a^1 = \left[x-\mathrm{e}^{-x}\right]_a^1 = 1-\mathrm{e}^{-1}-\left(a-\mathrm{e}^{-a}\right) = 1-a+\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-1}$.
2. **a.** Somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,1]$, f est dérivable sur cet intervalle et :
   $f'(x) = 2+2\mathrm{e}^{-x}$
   Les deux termes de cette somme sont positifs, donc sur $[0\,;\,1]$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$ de $f(0) = -2+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ à $f(1) = 2-2\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. D'où le tableau de variation :

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{\mathrm{e}}-2$	$-2-\frac{1}{\mathrm{e}}$

   b. Sur $[0\,;\,1]$, f croît de $f(0)\approx -1{,}6$ à $f(1)\approx 1{,}6$. Comme elle est croissante et continue elle s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ pour un réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   La calculatrice permet de trouver que :
   $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$, puis $0{,}45 < \alpha < 0{,}46$ et enfin $0{,}452 < \alpha < 0{,}453$.
   Donc $\alpha \approx 0{,}45$ au centième près.
3. On a :
   $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff a+1-\mathrm{e}^{-a} = 1-a+\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-1} \iff 2a-\mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-1} = 0$, ce qui signifie que a est une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\,;\,1]$.
   On a vu que cette solution est égale à α.
   Finalement les aires sont égales pour $a = \alpha \approx 0{,}45$.

Partie B

1. On a $g(0) = 1+1 = 2$. Il est donc évident que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est inférieure à $2\times 1 = 2$.
   Comme $g(1) = 1+\mathrm{e}^{-1}$, si $b \geqslant 1+\mathrm{e}^{-1}$ chacune des deux aires serait supérieure à 1 ce qui est impossible. Donc $b < 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

2. L'aire du domaine du bas est égale à $b \times 1 = b$ qui est égale à la demi-aire de $\mathcal{D}$.
On a donc :
$b = \frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}[G(x)]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left[x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left[1 - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^0\right]$.
Finalement $b = \frac{1}{2}\left(2 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \approx 0,816$.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u_n + 1}{2(n+1)}$
Affecter à n la valeur $n+1$.

2. Il faut rajouter avant le Fin Tant que : « Afficher la variable u ».

3. La suite (u_n) semble être décroissante vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = nu_{n+1} - 1 = (n+1) \times \dfrac{n \times u_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \dfrac{n \times u_n + 1}{2} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{n \times u_n - 1}{2} = \dfrac{1}{2}v_n$.
Cette relation montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1 \times u_1 - 1 = \dfrac{1}{2}$.

2. On a donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 0,5 \times 0,5^{n-1} = 0,5^n$.
Or $v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \dfrac{v_n + 1}{n} = \dfrac{1 + 0,5^n}{n}$.

3. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1 + (0,5)^n}{n} = \dfrac{n + n \times 0,5^{n+1} - (n+1) - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \dfrac{-1 + 0,5n \times 0,5^n - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \dfrac{-1 + 0,5^n(0,5n - n - 1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1 + 0,5^n(-0,5n - 1)}{n(n+1)} = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante (vers zéro).

Partie C - Retour à l'algorithmique

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geqslant 0,001$ Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u + 1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable n

Exercice 4 5 points

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Tant que $i < n$ faire
   Affecter à i la valeur $i+1$
   Afficher i
   Affecter à c la valeur $(0,8a+0,3b)$
   Afficher c
   Affecter à b la valeur $(0,2a+0,7b)$
   Afficher b
   Affecter à a la valeur c
   Fin du Tant que
2. Au vu de ces résultats, la suite (a_n) semble décroître vers 18 et la suite (b_n) semble croître vers 12.

Partie B - Étude mathématique

1. a_n et b_n étant les nombres respectifs d'oiseaux présents sur les îles A et B au début de l'année $203+n$, on a l'année suivante :
   sur l'île A, 80 % des oiseaux de l'île A de l'année précédente et et 30 % des oiseaux de l'île B de l'année précédente, soit :
   $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n$,
   sur l'île B, 20 % des oiseaux de l'île A de l'anée précédente et et 70 % des oiseaux de l'île B de l'année précédente, soit :
   $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,7b_n$.
   Donc avec $M = \begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\0,2 & 0,7\end{pmatrix}$, on a bien $U_{n+1} = MU_n$.
2. *Initialisation* :
   $M^1 = \begin{pmatrix}0,6+0,4\times0,5^1 & 0,6-0,6\times0,5^1\\0,4-0,4\times0,5^1 & 0,4+0,6\times0,5^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\0,2 & 0,7\end{pmatrix} = M$. La propriété est vraie au rang 1.
   Hérédité : on suppose que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $M^p = \begin{pmatrix}0,6+0,4\times0,5^p & 0,6-0,6\times0,5^p\\0,4-0,4\times0,5^p & 0,4+0,6\times0,5^p\end{pmatrix}$.
   Alors $M^{p+1} = M\times M^p = \begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\0,2 & 0,7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,6+0,4\times0,5^p & 0,6-0,6\times0,5^p\\0,4-0,4\times0,5^p & 0,4+0,6\times0,5^p\end{pmatrix}$.
   Le premier coefficient de cette matrice est :
   $0,8\times(0,6+0,4\times0,5^p)+0,3\times(0,4-0,4\times0,5^p) = 0,48+0,32\times0,5^p+0,12-0,2\times0,5^p =$
   $0,6+0,2\times0,5^p = 0,6+(0,4\times0,5)\times0,5^p = 0,6+0,4\times0,5^{p+1}$.
   On démontrerait de la même façon que :
   $M^{p+1} = \begin{pmatrix}0,6+0,4\times0,5^{p+1} & 0,6-0,6\times0,5^{p+1}\\0,4-0,4\times0,5^{p+1} & 0,4+0,6\times0,5^{p+1}\end{pmatrix}$.
   La propriété est donc vraie au rang $p+1$: elle est donc vraie quel que soit le naturel $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$.
3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
4. On admet donc que pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, \quad U_n = M^n U_0$ soit :
   $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,6+0,4\times0,5^n & 0,6-0,6\times0,5^n\\0,4-0,4\times0,5^n & 0,4+0,6\times0,5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix} = 10$
   $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\,(0,6+0,4\times0,5^n)+10\,(0,6-0,6\times0,5^n)\\20\,(0,4-0,4\times0,5^n)+10\,(0,4+0,6\times0,5^n)\end{pmatrix}$.
   Finalement quel que soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$:
   $a_n = 20\,(0,6+0,4\times0,5^n)+10\,(0,6-0,6\times0,5^n) = 12+8\times0,5^n+6-6\times0,5^n = 18+2\times0,5^n$.

Comme $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times0,5^n = 0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 18$.
Au bout de quelques années la population sur l'île A va se rapprocher de 18 millions (au bout de 10 ans : $\approx 18,002$)