

## Correction Baccalauréat S - Spécialité Métropole - Jeudi 20 Juin 2013

www.math93.com

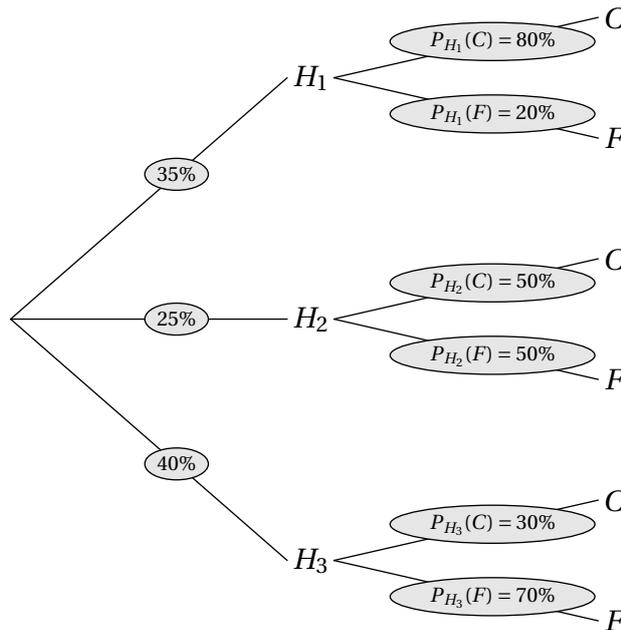
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1.

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.



b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur  $H_3$ .

On cherche à calculer  $P(H_3 \cap C)$ .

$$P(H_3 \cap C) = P_{H_3}(C) \times P(H_3).$$

$$P(H_3 \cap C) = 30\% \times 40\%.$$

$$P(H_3 \cap C) = 12\%.$$

c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

Les trois évènements  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C)$$

$$P(C) = P_{H_1}(C) \times P(H_1) + P_{H_2}(C) \times P(H_2) + 12\%$$

$$P(C) = 80\% \times 35\% + 50\% \times 25\% + 12\%$$

$$P(C) = 28\% + 12,5\% + 12\%$$

$$P(C) = 52,5\%$$

La probabilité de l'évènement C est égale à 0,525 soit  $P(C) = 52,5\%$ .

d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur  $H_1$  ? On arrondira à  $10^{-3}$ .

On cherche donc  $P_C(H_1)$ .

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{P_{H_1}(C) \times P(H_1)}{P(C)}$$

$$P_C(H_1) = \frac{80\% \times 35\%}{52,5\%}$$

$$P_C(H_1) = \frac{28\%}{52,5\%} \approx 53,33\%$$

On a donc, à  $10^{-3}$  près,  $P_C(H_1) \approx 53,3\%$

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On répète une suite de 10 expériences aléatoires de Bernoulli (succès/échec) indépendantes, où le succès est le fait de choisir un conifère. On sait que  $P(C) = 52,5\%$  donc  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = P(C) = 52,5\%$ .

b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à  $10^{-3}$ .

On a  $X \sim \mathcal{B}(n = 10; p = 52,5\%)$  donc

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 5) = C_{10}^5 0,525^5 (0,475)^5$$

On obtient alors  $P(X = 5) \approx 0,243$ .

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? La probabilité demandée est celle de l'événement  $X \leq 8$ , qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints  $X = 9$  et  $X = 10$ . On a alors :

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0,984.$$

La probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus est de 98,4% à  $10^{-3}$  près.

## Exercice 2.

7 points

### Commun à tous les candidats

On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1, 0), (1, 2), (0, 2) ;
- la courbe  $\mathcal{C}$  passe par le point B et la droite (BC) est tangente à  $\mathcal{C}$  en B ;
- il existe deux réels positifs  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel strictement positif  $x$  ;

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de  $f(1)$  et  $f'(1)$ .

– L'image de 1 par  $f$  est  $f(1) = 2$  ;

– La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est horizontale donc  $f'(1) = 0$ .

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$ .

La fonction  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u(x) = a + b \ln x$  et  $v(x) = x$ . Donc  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme quotient de fonctions qui le sont sur cet intervalle.

On a donc  $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ , avec  $u'(x) = \frac{b}{x}$  et  $v'(x) = 1$ .

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}.$$

Donc  $\forall x \in ]0; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$ .

c. En déduire les réels  $a$  et  $b$ .

–  $f(1) = 2$  donc  $f(1) = \frac{a + b \ln 1}{1} = 2$  soit  $a = 2$  ;

–  $f'(1) = 0$  donc  $f'(1) = \frac{(b-a) - b \ln 1}{1^2} = 0$  d'où  $b - 2 = 0$ .

On a de ce fait  $a = 2 = b$ .

On a donc :  $f(x) = \frac{2+2\ln x}{x}$  et  $f'(x) = \frac{-2\ln x}{x^2}$

2. a. Justifier que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  a le même signe que  $\ln x$ .  
 Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{-2\ln x}{x^2}$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $-2\ln x$  donc de  $-\ln x$ .

b. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

- Limite de  $f$  en 0.

$$f(x) = \frac{2+2\ln x}{x} = (2+2\ln x) \times \frac{1}{x} \text{ or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2+2\ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ,  $\mathcal{C}$  présente une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ ;

- Limite de  $f$  en  $+\infty$ .

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} \text{ or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} \text{ d'après le théorème des croissances comparées}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\mathcal{C}$  présente une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  en  $+\infty$ .

c. En déduire le tableau de variations de  $f$ .

On a montré que sur  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $-\ln x$ .

Donc  $f'(x)$  est positif sur  $]0; 1[$ , nul en 1, et négatif sur  $]1; +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f$	$-\infty$	↗ 2 ↘	0

3. a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0; 1]$ .

- La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $]0; 1]$ ;

- L'image par  $f$  de l'intervalle  $]0; 1]$  est  $] -\infty; 2]$  d'après le tableau de variations.

- Le réel  $k = 1$  appartient à l'intervalle image  $] -\infty; 2]$ .

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = k = 1$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0; 1]$ .

- Non demandé.

Pour avoir un encadrement de  $\alpha$ , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

$$\text{Avec un pas de } \Delta = 0,1 \text{ on obtient : } \begin{cases} f(0,4) \approx 0,42 < 1 \\ f(0,5) \approx 1,23 > 1 \end{cases}, \text{ donc } 0,4 \leq \alpha \leq 0,5.$$

$$\text{Avec un pas de } \Delta = 0,01 \text{ on obtient : } \begin{cases} f(0,46) \approx 0,97 < 1 \\ f(0,47) \approx 1,04 > 1 \end{cases}, \text{ donc } 0,46 \leq \alpha \leq 0,47.$$

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel  $\beta$  de l'intervalle  $]1; +\infty[$ , tel que  $f(\beta) = 1$ . Déterminer l'entier  $n$  tel que  $n < \beta < n + 1$ .

Pour avoir un encadrement de  $\beta$ , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

$$\text{Avec un pas de } \Delta = 1 \text{ on obtient : } \begin{cases} f(5) \approx 1,043 \\ f(6) \approx 0,93 \end{cases}, \text{ donc } 5 \leq \beta \leq 6.$$

De ce fait, l'entier  $n$  tel que  $n < \beta < n + 1$  est  $n = 5$ .

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	$a, b$ et $m$ sont des réels.
Initialisation :	Affecter à $a$ la valeur 0 Affecter à $b$ la valeur 1
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$ Affecter à $m$ la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$ Si $f(m) < 1$ alors Affecter à $a$ la valeur $m$ Sinon Affecter à $b$ la valeur $m$ Fin de Si Fin de tant que
Sortie :	Afficher $a$ Afficher $b$

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
$a$	0	0	0,25	0,375	0,4375
$b$	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
$m$	0,5	0,25	0,375	0,4375	Sortie car $b - a < 0,1$

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

Cet algorithme permet de trouver un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude inférieure à 0,1 par la méthode dite de dichotomie.

L'étape 5 permet de trouver que :  $0,4375 < \alpha < 0,5$ .

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de  $\beta$  d'amplitude 0,1.

On pourrait l'intégrer dans l'algorithme mais plus simplement, on choisit les bornes de départs ainsi :

$$\begin{cases} f(1) = 2 > 1 \\ f(10) \approx 0,66 < 1 \end{cases}, \text{ donc on sait que } a = 1 < \beta < 10 = b.$$

Attention, la fonction  $f$  est décroissante sur  $[1; 10]$  donc il va falloir inverser le test Si  $f(m) > 1$ .

Cela donne :

Variables :	$a, b$ et $m$ sont des réels.
Initialisation :	Affecter à $a$ la valeur 1 Affecter à $b$ la valeur 10
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$ Affecter à $m$ la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$ Si $f(m) > 1$ alors Affecter à $a$ la valeur $m$ Sinon Affecter à $b$ la valeur $m$ Fin de Si Fin de tant que
Sortie :	Afficher $a$ Afficher $b$

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer :  $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1$ .

– Montrons déjà que : La courbe  $\mathcal{C}$  partage le rectangle OABC en deux parties.

– L'image de  $]0; 1]$  par  $f$  est  $] -\infty; 2]$  donc la courbe  $\mathcal{C}$  est sous la droite (BC) ;

– La fonction  $f$  s'annule une seule fois sur  $]0; 1]$ , en  $\frac{1}{e}$  car  $f(x) = 0 \iff 2 + 2 \ln x = 0 \iff x = \frac{1}{e}$  ;

– La courbe  $\mathcal{C}$  coupe donc l'axe des abscisses en un point  $E\left(\frac{1}{e}; 0\right)$ .

- Sur l'intervalle  $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est en dessous de l'axe  $(Ox)$ , elle n'est donc pas incluse dans le rectangle OABC;
- Sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{e}; 0\right]$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est donc strictement incluse dans le rectangle OABC;

La courbe  $\mathcal{C}$  partage donc le rectangle OABC en 2 parties.

- **Aire sous la courbe.**

$f$  est bien positive sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{e}; 0\right]$ . L'aire sous la courbe  $\mathcal{C}$  vaut donc en u.a. :  $\int_{\frac{1}{e}}^0 f(x) dx$ .

- **Aire du rectangle.**

Le rectangle OABC a une aire de  $2 \times 1 = 2$  u.a.

- **Conclusion**

On veut partager cette aire en 2 aires égales. Il faut donc que chacune d'entre-elle ait une aire de 1 u.a.

Cela revient donc à démontrer :  $\int_{\frac{1}{e}}^0 f(x) dx = 1$

- b. En remarquant que l'expression de  $f(x)$  peut s'écrire  $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$  terminer la démonstration.**

$\int_{\frac{1}{e}}^0 f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^0 \left( \frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \right) dx$ , et par linéarité de l'intégrale on obtient

$$\int_{\frac{1}{e}}^0 f(x) dx = 2 \int_{\frac{1}{e}}^0 \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{e}}^0 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x dx$$

- Or une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , est  $x \mapsto \ln x$ ;
- Or une primitive de  $x \mapsto 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$ , est  $x \mapsto (\ln x)^2$ .

On a donc :

$$\int_{\frac{1}{e}}^0 f(x) dx = [2 \ln x + (\ln x)^2]_{\frac{1}{e}}^0 = 0 + 0 - (2 \ln e^{-1} + (\ln e^{-1})^2) = -(-2 + 1) = 1$$

On a bien montré que  $\int_{\frac{1}{e}}^0 f(x) dx = 1$  et donc que la courbe  $\mathcal{C}$  partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

## Exercice 3.

4 points

## Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

**1. Proposition 1 : VRAIE.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité  $|z - i| = |z + 1|$  est une droite.

Si on considère les points  $M(z)$ ,  $A(i)$  et  $B(1)$ , l'équation proposée se traduit en distances par :  $AM = BM$  et donc l'ensemble des points  $M(z)$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité  $|z - i| = |z + 1| \iff AM = BM$ , est la médiatrice du segment  $[AB]$ . C'est bien une droite.

**2. Proposition 2 : FAUSSE.** Le nombre complexe  $(1 + i\sqrt{3})^4$  est un nombre réel.

L'écriture exponentielle de  $(1 + i\sqrt{3})$  est  $2e^{i\frac{\pi}{3}}$  donc :

$$(1 + i\sqrt{3})^4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Deux arguments au choix pour conclure :

– L'argument de  $2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$  est  $\frac{4\pi}{3} \neq 0 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

L'argument n'est pas congru à 0 modulo  $\pi$ , donc le nombre n'est pas un réel.

– On peut aussi écrire la forme algébrique du nombre.

$$2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16 \left( \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = 16 \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \notin \mathbb{R}$$

**3. Proposition 3 : VRAIE.** Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

Le piège ici est de confondre perpendicularité et orthogonalité dans l'espace.

**Rappel de cours**

- On dit que deux droites sont perpendiculaires (donc sécantes) lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit.

*Remarque : deux droites perpendiculaires sont sécantes, donc coplanaires.*

- On dit que deux droites sont orthogonales si l'une d'elles est parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre.

*Remarque : deux droites perpendiculaires sont orthogonales.*

Calculons le produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{EC}$  et  $\overrightarrow{BG}$ .

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG})$$

Or

- $\overrightarrow{EA}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{FG}$  car (FG) est perpendiculaire au plan (AEFB) ;
- $\overrightarrow{AB}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{BF}$  et  $\overrightarrow{FG}$  car (AB) est perpendiculaire au plan (BCGF) ;
- $\overrightarrow{BC}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{BF}$ .

Donc il ne reste que deux produit scalaires non nuls après développement :

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{FG}$$

De plus

- $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{BF}$  ;
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$  .

Donc

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = -BF^2 + BC^2$$

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \text{ car } BF = BC$$

Les droites (EC) et (BG) sont bien orthogonales.

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Soit le plan P d'équation cartésienne  $x + y + 3z + 4 = 0$ . On note S le point de coordonnées (1, -2, -2).

**4. Proposition 4 : VRAIE.**

La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$  a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur normal au plan est un vecteur directeur de la droite. D'après l'équation cartésienne du plan, un vecteur normal est  $\vec{n}(1; 1; 3)$ .

Une représentation paramétrique de la droite de vecteur directeur  $\vec{n}(1; 1; 3)$  et passant par le point S(1, -2, -2) s'obtient en écrivant que pour  $M(x, y, z)$ , on a  $\overrightarrow{SM}(x-1; y+2; z+2) = k \times \vec{n}(1; 1; 3) \forall k \in \mathbb{R}$ .

Donc une équation de la droite est :

$$\begin{cases} x-1 = k \\ y+2 = k \\ z+2 = 3k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$$

Soit

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + k \\ z = -2 + 3k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$$

Par la suite, en prenant  $k = 1 + t$  on obtient bien l'équation paramétrique proposée.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}$$

**Exercice 4.****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1<sup>er</sup> janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70% résidaient à la campagne et 30% en ville. L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant;
- chaque année, 5% de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $v_n$  le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1<sup>er</sup> janvier de l'année (2013 +  $n$ ) et  $c_n$  le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

**1. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  et  $c_n$ .**

On a chaque année, 5% de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville. Donc pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{cases} v_{n+1} = 95\%v_n + 1\%c_n \\ c_{n+1} = 5\%v_n + 99\%c_n \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} v_{n+1} = 0,95v_n + 0,01c_n \\ c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n \end{cases}$$

**2. Écriture matricielle.**

$$\text{En posant } A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}, \text{ on a } AX = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}$$

**3. Soit les matrices  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ .**

a. Calculer  $PQ$  et  $QP$ . En déduire la matrice  $P^{-1}$  en fonction de  $Q$ .

$$D'une part PQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \times \text{Id}_2.$$

$$D'autre part QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \times \text{Id}_2.$$

Par conséquent  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$ .

b. Vérifier que la matrice  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale  $D$  que l'on précisera.

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -0,94 \\ 5 & 0,94 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et donc } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix} = D$$

c. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

Démontrons la propriété par récurrence.

– **Initialisation.**

Pour  $n = 1$ , on a  $PD^nP^{-1} = PD^1P^{-1}$  or  $P^{-1}AP = D$  donc

$$PD^1P^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1}$$

$$PD^1P^{-1} = (PP^{-1})A(PP^{-1})$$

Et donc, pour  $n = 1$ , on a  $PD^nP^{-1} = A$ , la propriété est vraie.

– **Hérédité.** Supposons la propriété vraie au rang  $n$  :  $PD^nP^{-1} = A^n$ .

Alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = (PDP^{-1}) \times (PD^nP^{-1})$$

$$A^{n+1} = A \times A^n = PD(P^{-1}P)D^nP^{-1}$$

$$A^{n+1} = PDD^nP^{-1}$$

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

– **Conclusion.**

La propriété est vraie au rang 1. En la supposant vraie au rang  $n$ , elle est encore vraie au rang suivant.

Donc pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on a  $PD^nP^{-1} = A^n$ .

d. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6} (1 + 5 \times 0,94^n) v_0 + \frac{1}{6} (1 - 0,94^n) c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

On sait que pour  $-1 < q < 1$  on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$  et  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 5 \times 0,94^n) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 0,94^n) = 1 \end{cases}$ , de ce fait  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{6} (v_0 + c_0)$

Or  $v_0 + c_0 = 250\,000$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{250\,000}{6} \approx 41\,667$

La population citadine sera, au bout d'un grand nombre d'année de 41 667 habitants, soit environ  $\frac{1}{6}$  de la population totale.