

🌀 Corrigé Baccalauréat S Métropole 12 septembre 2013 🌀

EXERCICE 1 :

6 points

Partie A :

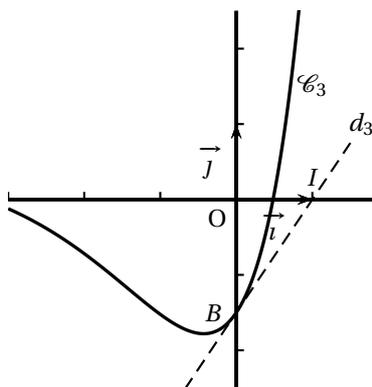
1. Par lecture graphique, le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

2. a. On sait que F est une primitive de f donc, $F' = f$

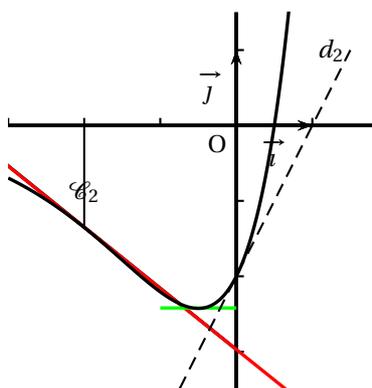
$$F'(0) = f(0) = 2, F'(-2) = f(-2) = 0.$$

b. \mathcal{C}_3 ne convient pas car la tangente au point d'abscisse 0 n'a pas pour coefficient directeur 2 :



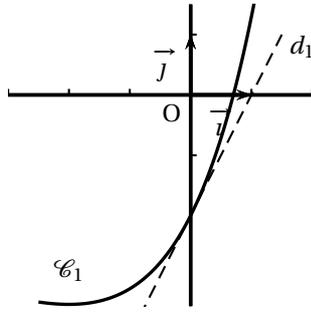
Elle passe par $B(0 ; -1,5)$ (environ) et $I(1 ; 0)$ donc le coefficient directeur de cette tangente est $\frac{y_I - y_B}{x_I - x_B} = 1,5$, donc \mathcal{C}_3 ne convient pas.

\mathcal{C}_2 ne convient pas car la tangente au point d'abscisse (-2) n'a pas pour coefficient directeur 0.



\mathcal{C}_2 ne convient pas, la tangente horizontale semble plutôt concerner le point d'abscisse $(-0,5)$ de la courbe.

Il reste donc \mathcal{C}_1

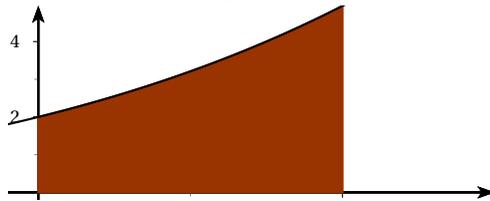
**Partie B :**

1. a. $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} + (x+2)e^{\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2}$ donc
 $f'(x) = \frac{1}{2}(2+x+2)e^{\frac{1}{2}x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.
- b. On sait que la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives, donc $f'(x)$ est du signe de $(x+4)$, et donc le sens des variations de f est donné par le tableau :

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	\searrow	$(-2)e^{-2}$	\nearrow

Il y a donc bien un minimum en $x = -4$

2. a. si $x > (-2)$, $f(x) > 0$ vu son expression, donc sur $[0 ; 1]$ f est positive, continue (car produit de fonctions continues), son intégrale sur $[0 ; 1]$ est donc l'aire entre la courbe de f , l'axe des x et les verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (en unité d'aire).



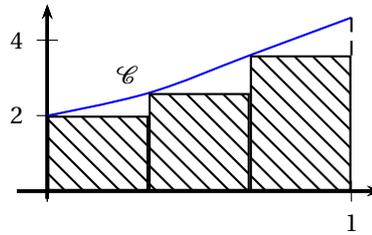
- b. $2(u(x)v'(x) + u'(x)v(x)) = 2\left(1 \times e^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right) = (2+x)e^{\frac{1}{2}x}$
Ainsi on voit bien que f est une dérivée : $f = (2uv)'$; donc $(2uv)$ est une primitive de f .
- c. L'intégrale I se calcule à l'aide d'une primitive de f donc $I = [2u(x)v(x)]_0^1 = [2xe^{\frac{1}{2}x}]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$
3. a. Faisons un tableau des valeurs successives de k et s pendant le déroulement de l'algorithme pour $n = 3$:

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

k	s
0	0
0	$0 + \frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)$
1	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$
2	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$

Le traitement est alors fini car k a atteint la valeur $(3-1)$ ce qui a été suivi de la nouvelle valeur de s , l'affichage est alors $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$,

or chacun de ces trois termes est l'aire d'un des trois rectangles (largeur obtenue en divisant l'unité par $n = 3$, leurs longueurs successives sont $f\left(\frac{0}{3}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)$).



- b. D'une façon générale l'affichage de l'algorithme obtenu après n boucles (de $k = 0$ à $k = (n-1)$) est la somme de n termes qui sont de la forme $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ donc l'affichage est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

c'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des x entre $x = 0$ et $x = 1$, leur largeur vaut $\frac{1}{n}$.

Quand n devient grand, s_n se rapproche de $I = \int_0^1 f(x) dx$. (cours)

EXERCICE 2

4 points

1. RÉPONSE b.

La droite \mathcal{D} est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = 1+3t \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

\mathcal{P} est le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$. La droite \mathcal{D} est déterminée par le point $B(5;1;4)$ et son vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, le plan \mathcal{P} ne contient pas B car $3x_A+2y_A+z_A-6=15+2+4-6 \neq 0$, donc la droite \mathcal{D} n'est pas incluse dans le plan \mathcal{P} .

Le vecteur normal de \mathcal{P} c'est $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\vec{n} \perp \vec{v}$ puisque leur produit scalaire vaut $0 : (-2) \times 3 + 2 \times 3 + 0 = 0$, donc la droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} .

2. RÉPONSE b.

\mathcal{D}' la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3; 1; 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont parallèles, car leur vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les deux colonnes de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles.

Donc elles sont soit sécantes, soit ne sont pas coplanaires.

Un système d'équation paramétrique de \mathcal{D}' est $\begin{cases} x = 3+2u \\ y = 1-u \\ z = 1+2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$

On résout le système en t et u :

$$(S) : \begin{cases} 3+2u = 5-2t \\ 1-u = 1+3t \\ 1+2u = 4 \end{cases} \quad (S) : \begin{cases} u = 1,5 \\ 3+3 = 5-2t \\ 1-1,5 = 1+3t \end{cases} \quad (S) : \begin{cases} u = 1,5 \\ t = -0,5 \end{cases}$$

Les deux droites sont donc sécantes au point $C(6; -0,5; 4)$.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. **RÉPONSE a.** Soit \mathcal{E} l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+i| = |z-i|$. Si on considère D d'affixe $(-i)$ et F d'affixe i , alors \mathcal{E} l'ensemble des points M tels que $DM = FM$ est donc la médiatrice de $[DF]$, c'est l'axe des x .

4. **RÉPONSE c.** On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives sont notées b

et c , on suppose que $\frac{c}{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

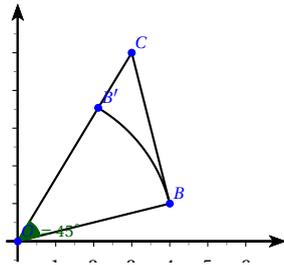
Donc en considérant les vecteurs \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OC} et en utilisant module et argument de $\frac{z_C - z_O}{z_B - z_O} =$

$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, vu que $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est écrit sous forme exponentielle (module : $\sqrt{2}$, argument : $\frac{\pi}{4}$)

on en déduit que : $\frac{|z_C - z_O|}{|z_B - z_O|} = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}$

Donc $OC = \sqrt{2} \times OB$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}$

On peut donc tracer le dessin du triangle OBC , il suffit de choisir B (autre que O)



Le triangle OBC semble isocèle et rectangle en B , prouvons le en calculant $|0 - b|$ et $|c - b|$ puis $\arg \frac{z_O - z_B}{z_C - z_B}$, donc

on va calculer $\frac{z_O - z_B}{z_C - z_B}$ c'est

$$\frac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-b}{b\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - b}; \quad \frac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - 1};$$

$$\frac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-1}{(1+i) - 1} \quad \text{car } e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et que}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

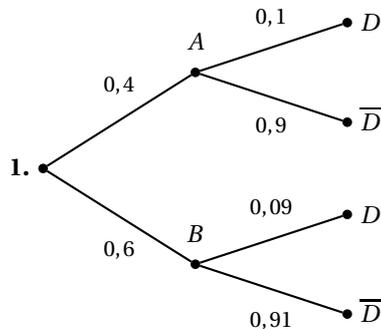
$$\frac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-1}{i}$$

$$\frac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = i \text{ car } (-1) = (i)^2 \text{ et}$$

i est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, donc $BO = BC$ et $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 3

5 points



a. voir à gauche.

b. On demande $p(A \cap D)$, selon l'arbre c'est $0,4 \times 0,1$, donc $p(A \cap D) = 0,04$.

c. On calcule aussi $p(B \cap D)$ de la même façon, c'est $0,6 \times 0,09 = 0,054$.

Enfin comme A et B sont des événements formant une partition de l'ensemble des pièces,

$$P(D) = p(D \cap (A \cup B))$$

$p(D) = p((D \cap A) \cup (D \cap B)) = p(D \cap A) + p(D \cap B)$ car les événements $(D \cap A)$ et $(D \cap B)$ sont disjoints (= incompatibles) ainsi

$$p(D) = 0,04 + 0,054 = 0,094.$$

d. On nous demande $p_D(A)$, on utilise la formule :

$$p_D(A) = \frac{p(D \cap A)}{p(D)} = \frac{0,04}{0,094} = \frac{40}{94} = \frac{20}{47}.$$

2. a. X_n est le compteur de pièces conformes ; on répète n fois la même expérience qui consiste à extraire une pièce ; elle est conforme : succès de probabilité 0,9, elle est non conforme, probabilité 0,1, chacune des n expériences est une expérience de Bernoulli, elles sont indépendantes entre elles puisque « on assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise. »

Donc X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,9$, notée $\mathcal{B}(n, 0,9)$.

- b. Si $n = 150 > 30$, $np = 135 > 5$ et $n(1-p) = 15 > 5$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I est défini par $I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$, on calcule avec $p = 0,9$ et $n = 150$ on trouve $1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \simeq 0,048$, donc $I \simeq [0,852; 0,948]$.
- c. Ici on a $(150 - 21)$ pièces conformes donc $F_n = \frac{129}{150} = \frac{43}{50}$ soit $0,86$.
Au regard de l'intervalle de fluctuation de la question ci-dessus, ce test ne remet pas en cause le réglage de la machine A car $0,86 \in [0,852; 0,948]$.

EXERCICE 4

5 points

1. a. $u_1 = \frac{4}{5} = 0,8$; $u_2 = \frac{14}{13} \simeq 1,08$; $u_3 = \frac{40}{41} \simeq 0,98$; $u_4 = \frac{122}{121} \simeq 1,01$.
- b. On voit bien que $u_0 > 1$; $u_1 < 1$; $u_2 > 1$; $u_3 < 1$; $u_4 > 1$ donc le signe des différences $(u_n - 1)$ change à chaque rang :
si n pair c'est +
si n impair c'est -, comme $(-1)^n$.
- c. $(u_{n+1} - 1) = \frac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{2u_n + 1}$.
- d. On a admis au début de l'énoncé que tous les u_n sont strictement positifs (on pourrait le démontrer par récurrence); démontrons par récurrence que $\mathcal{P} : (u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$:
L'initialisation est faite au b)
Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $(u_n - 1)$ ait le signe de $(-1)^n$ alors $(1 - u_n)$ a le signe opposé de $(u_n - 1)$ donc a le signe de $(-(-1)^n)$ donc de $(-1)^{n+1}$ et $(2u_n + 1) > 0$, vu que tous les u_n sont strictement positifs, donc la fraction $\frac{1 - u_n}{2u_n + 1}$ a le signe de $(-1)^{n+1}$ et comme elle est égale à $(u_{n+1} - 1)$, on a prouvé que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, l'hérédité est prouvée.
CONCLUSION : pour tout n de \mathbb{N} , $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$.
2. Vu que tous les u_n sont strictement positifs, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe .
- a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{-u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 1}$

$$v_{n+1} = \frac{-\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} \quad v_{n+1} = \frac{\frac{-(u_n+2)}{2u_n+1} + \frac{(2u_n+1)}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + \frac{2u_n+1}{2u_n+1}} \quad v_{n+1} = \frac{\frac{-(u_n+2)+(2u_n+1)}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{-(u_n+2) + (2u_n+1)}{u_n+2+2u_n+1}; \quad v_{n+1} = \frac{(u_n-1)}{3u_n+3}; \quad v_{n+1} = \frac{-1}{3} \frac{(1-u_n)}{u_n+1} \quad v_{n+1} = \frac{-1}{3} v_n.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{-1}{3}$.

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3} \text{ donc } v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n; \quad v_n = -\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

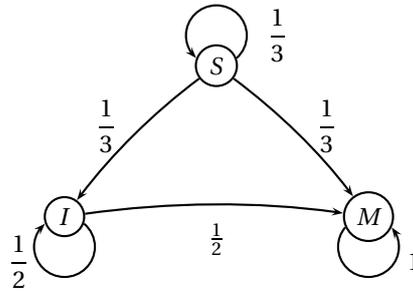
- b. $(u_n + 1)v_n = u_n - 1$ donc $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$; on trouve bien que $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ comme dit dans l'énoncé.

$$\text{Donc, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a } u_n = \frac{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}}; \quad \text{donc, } u_n = \frac{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}}.$$

Comme la suite $\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \left(\frac{-1}{3}\right)$, donc $-1 < q < 1$, cette suite tend vers 0, et par composition avec la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ qui est continue et vaut 1 pour $x = 0$; on peut dire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$.

EXERCICE 4 : SPÉCIALITÉ

5 points



On note $P_n = (s_n \ i_n \ m_n)$ la matrice ligne .

On a alors $P_0 = (0,99 \ 0 \ 0,01)$ et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} s_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$$

1. La matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel
- sur la première ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état S , de passer
 - pour $A_{1,1}$ à l'état S , c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le calcul et le texte, c'est $1 - 2\frac{1}{3}$
 - pour $A_{1,2}$ à l'état I , c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le texte, c'est $\frac{1}{3}$;
 - pour $A_{1,3}$ à l'état SM , c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le calcul et le texte, c'est $\frac{1}{3}$.
 - sur la deuxième ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état I , de passer
 - pour $A_{2,1}$ à l'état S , c'est selon le graphique 0.
 - pour $A_{2,2}$ à l'état I , c'est selon le graphique $\frac{1}{2}$, ou par le texte idem;
 - pour $A_{2,3}$ à l'état SM , c'est selon le graphique $\frac{1}{2}$, ou par le texte idem.
 - sur la troisième ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état M , de passer
 - pour $A_{3,1}$ à l'état S , c'est selon le graphique 0, ou en réfléchissant, s'il est malade il ne peut pas devenir sain;
 - pour $A_{3,2}$ à l'état I , c'est selon le graphique 0;
 - pour $A_{3,3}$ à l'état SM , c'est selon le graphique 1, ou par le texte idem.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ on a bien}$$

$$(s_n \ i_n \ m_n) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}s_n \quad \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \quad \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \right) = (s_{n+1} \ i_{n+1} \ m_{n+1})$$

$$P_{n+1} = P_n \times A.$$

2. Par récurrence, prouvons que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

Pour $n = 1$ c'est dire que $P_1 = P_0 \times A$ ce qui est vrai (appliquer A à P_0 permet de passer de P_0 à P_1).

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n tel que $P_n = P_0 \times A^n$, alors multiplions les deux membres à droite par A c'est possible car P_n est de format $(1 ; 3)$ et A de format $(3 ; 3)$ donc les deux membres sont bien de format $(1 ; 3)$, on obtient $P_n A = (P_0 A^n) \times A$, donc $P_n A = P_0 (A^n \times A)$; par associativité du produit de matrices;

$$\text{et enfin } P_n A = P_0 A^{n+1}$$

et du côté gauche c'est P_{n+1} , donc $P_{n+1} = P_0 A^{n+1}$.

L'hérédité est prouvée et donc pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. $P_4 = P_0 A^4$.

Pour calculer correctement A^4 on peut remarquer que $6A$ est à coefficients entiers.

La calculatrice donne :

$$(6A)^4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^4.$$

$$(6A)^4 = \begin{pmatrix} 16 & 130 & 1150 \\ 0 & 81 & 1215 \\ 0 & 0 & 1296 \end{pmatrix} \text{ donc } A^4 = \begin{pmatrix} \frac{16}{1296} & \frac{130}{1296} & \frac{1150}{1296} \\ 0 & \frac{81}{1296} & \frac{1215}{1296} \\ 0 & 0 & \frac{1296}{1296} \end{pmatrix}$$

et en la multipliant à gauche par la matrice $P_0 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01)$ on obtient

$$P_4 = \begin{pmatrix} \frac{15,84}{1296} & \frac{128,7}{1296} & \frac{1151,46}{1296} \end{pmatrix}$$

donc :

$$P_4 = (0,012222\dots \quad 0,09930555\dots \quad 0,88847222\dots) \text{ donc en arrondissant à } 10^{-2} :$$

$$P_4 = (0,01 \quad 0,10 \quad 0,89) \text{ (comme donné avant B. 1.)}$$

$S_4 \approx 0,01$, il y a un pourcentage de chance qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines.

Partie B

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$Q_n = (S_n \quad I_n \quad M_n)$ où S_n , I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n -ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n , on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$.

1. On fait $Q_n \times B$ c'est $(S_n \quad I_n \quad M_n) \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c'est Q_{n+1} , donc

$$Q_{n+1} = \left(\frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n \quad \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n \quad \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \right).$$

$$\begin{cases} S_{n+1} &= \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n \\ I_{n+1} &= \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n \\ M_{n+1} &= \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{cases}$$

2. Pour faire des calculs sur des entiers on calcule $(12B)^2$:

$$(12B) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ et alors}$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $(12B)^2 = 48J$, $144B^2 = 48J$ donc $B^2 = \frac{1}{3}J$

Comme on peut par calcul prouver que $B^3 = B^2$, on peut par récurrence prouver que pour tout n de \mathbb{N} , $n \geq 2$, on a $B^n = B^2 = \frac{1}{3}J$

3. a. On peut montrer, comme dans la partie A que

[pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+1} = Q_n \times B$] \implies [pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = Q_0 \times B^n$]

Si $n \geq 2$, $Q_n = Q_0 \times B^n$ et comme $B^n = B^2$, on a $Q_n = Q_0 \times B^2$, donc $Q_n = Q_2$, on calcule Q_2 en faisant $Q_0 \times (\frac{1}{3}J)$ c'est aussi $(\frac{1}{3})(Q_0 \times J) = (\frac{1}{3})(0,01 + 0,1 + 0,89 \quad 0,01 + 0,1 + 0,89 \quad 0,01 + 0,1 + 0,89)$, donc $Q_n = (\frac{1}{3})(Q_0 J) = (\frac{1}{3})(1 \quad 1 \quad 1)$,

$Q_n = (\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$.

b. Finalement on peut dire qu'avec ce vaccin l'évolution de la maladie va donner des groupes équitablement répartis : autant de chance d'être malade ou sain ou infecté ; le vaccin n'éradique pas la maladie. (cependant sans vaccin, on pourrait montrer que la répartition limite serait : tous malades ...)