Baccalauréat 2013

Série S - Spécialité
Amérique du Sud - 21 Novembre 2013
Correction

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. Étude de fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

Pour tout réel x on a :

$$\mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e} \times \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \mathrm{e} \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}}$$

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

- $\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} 1-x &= +\infty\\ \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x &= +\infty\end{aligned}\right\} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1-x} = +\infty$
- $\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} x &= -\infty\\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1-x} &= +\infty\end{aligned}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{1-x} = -\infty$

soit

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- (2) : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$
- (3) : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

- D'après le (1) de la propriété 1 du cours on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et donc en passant à l'inverse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
- De ce fait en multipliant par $\mathrm{e} > 0$ on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

La courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 0$ comme **asymptote horizontale en $+\infty$** .

4. Déterminer la dérivée de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme uv avec :

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{1-x} & ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{1-x} + x \times \left(-\mathrm{e}^{1-x}\right) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{1-x}\Big(1 - x\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{1-x}}$$

5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{1-x} > 0$$

donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$ et de ce fait on obtient aisément le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1) = 1$	$\searrow$	0

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} (1-x)g_n(x) &= (1-x)\Big(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\Big) \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,, \ (1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,, \ g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$

2. Comparer les fonctions h_n et g_n', g_n' étant la dérivée de la fonction g_n.

Pour tout réel x,

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

donc on peut dériver les $n+1$ termes de cette somme de monômes dérivables

$$g_n'(x) = 0 + 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = h_n(x)$$

Or, pour tout réel $x \neq 1$, $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
La fonction g_n est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$g_n(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 1 - x^{n+1} & ; \quad u'(x) = -(n+1)x^n \\ v(x) = 1 - x & ; \quad v'(x) = -1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \ g_n'(x) = h_n(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$$g_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - \left(1 - x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$g_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \ g_n'(x) = h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$$

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
En utilisant les résultats de la partie B, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

$$S_n = 1 + 2\,\mathrm{e}^{-1} + \cdots + n\,\mathrm{e}^{1-n} = 1 + 2\,\mathrm{e}^{-1} + \cdots + n\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n-1} = h_n\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$$

Or

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(1-x)^2}$$

donc

$$h_n\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \frac{n\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^n + 1}{\left(1 - \left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right)^2}$$

de ce fait

$$\boxed{S_n = \frac{\dfrac{n}{\mathrm{e}^{n+1}} - \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^{n}} + 1}{\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}}$$

- D'après le (1) de la propriété 1 du cours on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty$ et donc en passant à l'inverse $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$.
- De ce fait :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} \times \frac{1}{\mathrm{e}} = 0}$$

- En outre

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = 0 \end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} + \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} = 0}$$

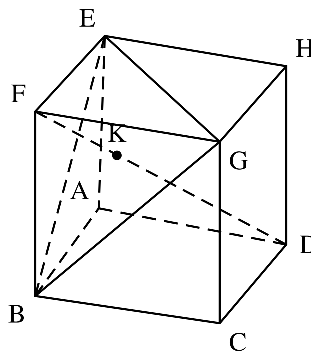
- Donc on obtient facilement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^2}}$$

Exercice 2. Géométrie dans l'espace — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

Dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, le point A a pour coordonnées A $(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$, B $(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$, D $(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ et E $(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = 1 \times \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 0 \times \overrightarrow{\mathrm{AD}} + 1 \times \overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

donc le point F a pour coordonnées $(1\ ,\ 0\ ,\ 1)$.

La droite (FD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ de coordonnées $(1\ ,\ -1\ ,\ 1)$; de plus elle passe par le point D $(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$.

La droite (FD) a pour représentation paramétrique :

$$\boxed{(FD)\ :\ \begin{cases} x = & t \\ y = 1 - t \\ z = & t \end{cases}\ ,\ \text{où } t \in \mathbb{R}}$$

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).

Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(1\ ,\ -1\ ,\ 1)$. Ce vecteur est un vecteur normal au plan (BGE) s'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ directeurs du plan (BGE).

- $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ a pour coordonnées $(1\ ,\ 0\ ,\ -1)$;

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\mathrm{EB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times (-1) = 0$$

donc

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{EB}}$$

- On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \text{soit } \overrightarrow{\mathrm{EG}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0$$

donc

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{EG}}$$

Donc le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{n}\ (1\ ,\ -1\ ,\ 1) \text{ est normal au plan (BGE).}}$$

Le plan (BGE) a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et passe par le point B ; c'est l'ensemble des points :

$$(\text{BGE}) = \left\{ \text{M}\,(x\ ,\ y\ ,\ z)\ ,\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{BM}} \right\}$$

$\overrightarrow{\text{BM}}$ a pour coordonnées $(x-1\ ,\ y\ ,\ z)$;

$$(\text{BGE}) = \{\text{M}\,(x\ ,\ y\ ,\ z)\ ,\ 1 \times (x-1) + (-1) \times y + 1 \times z = 0\}$$

L'équation cartésienne du plan

$$\boxed{(\text{BGE}) \ :\ x - y + z - 1 = 0}$$

3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées K$\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{DF}}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est normal au plan (BGE) donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).
Les coordonnées $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (BGE) sont solutions du système :

$$\left\{\begin{aligned} x &= && t \\ y &= 1 - && t \\ z &= && t \\ x - y + z - 1 &= && 0 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= && t \\ y &= 1 - && t \\ z &= && t \\ t - (1-t) + t - 1 &= && 0 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= && t \\ y &= 1 - && t \\ z &= && t \\ 3t &= && 2 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} \\ y &= \tfrac{1}{3} \\ z &= \tfrac{2}{3} \\ t &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}\right.$$

Donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) au point K de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ,\ \dfrac{1}{3}\ ,\ \dfrac{2}{3}\right)$.

4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.

Soit H le milieu de [EG] ; ce point est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BGE de côté $a = \sqrt{2}$.

Dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur est égale à $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; donc dans le triangle équilatéral BEG, la hauteur

$$\text{BH} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

L'aire du triangle BEG vaut

$$\boxed{\mathcal{A}(\text{BEG}) = \frac{\text{EG} \times \text{BH}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.

Le volume d'un tétraèdre est $\dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$. D'après les questions précédentes, le volume du tétraèdre BEGD est $\dfrac{\text{aire(BEG)} \times \text{KD}}{3}$. Dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$:

$$\text{KD}^2 = (x_D - x_K)^2 + (y_D - y_K)^2 + (z_D - z_K)^2 = \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9}$$

$$KD = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Le volume du tétraèdre est donc :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{3}}$$

Exercice 3. Spé. maths : Matrices 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

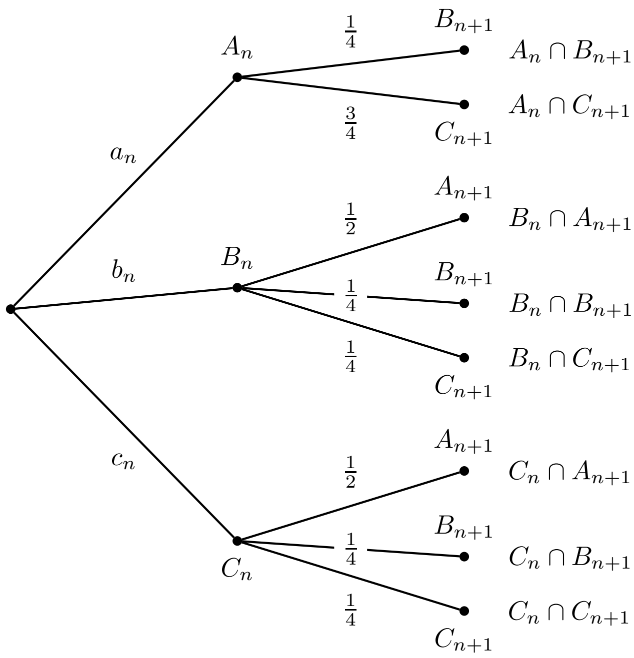
Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Un internaute sur la page n° 1, ira sur la page n° 2 avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, ou sur la page n° 3 avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n° 2, alors il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ ou restera sur la page n° 2 avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, ou il ira sur la page n° 3 avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n° 3, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, soit il ira sur la page n° 2 avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$,soit il restera sur la page n° 3 avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n, on définit les évènements et les probabilités suivants :
A_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 » et on note $a_n = P(A_n)$.
B_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 » et on note $b_n = P(B_n)$.
C_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 » et on note $c_n = P(C_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n$.

On peut construire un arbre pondéré pour représenter la situation.



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \end{aligned}$$

On a alors en utilisant l'arbre pondéré

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2}$$

De même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} &= \quad\quad\quad \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases}}$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice 3×3 que l'on précisera.

D'après la question précédente :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 0 \times a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Donc en prenant $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ on a $U_{n+1} = MU_n$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $U_n = M^n U_0$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, $M^0 U_0 = U_0$ car M^0 est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Donc la propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité : On suppose que la propriété est vraie au rang p avec $p \geqslant 0$, c'est-à -dire $U_p = M^p U_0$.
  On sait que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ donc $U_{p+1} = MU_p$.
  Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $U_p = M^p U_0$, donc $u_{p+1} = M \times M^p U_0 = M^{p+1} U_0$.
  Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.
- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire, donc elle est pour tout $n \geqslant 0$.

Donc, pour tout entier naturel n, $\boxed{U_n = M^n U_0}$.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

Soit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

$$MU = U \iff \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système (S) : $\begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x & +y & +z & = 0 & \text{(L1)} \\ x & -3y & +z & = 0 & \text{(L2)} \\ 3x & +y & -3z & = 0 & \text{(L3)} \\ x & +y & +z & = 1 & \text{(L4)} \end{cases}$

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} -2x & +y & +z & = 0 & : \text{(L1)} \\ & -5y & +3z & = 0 & : \text{(L'2) = 2(L2)+(L1)} \\ & +5y & -3z & = 0 & : \text{(L'3) = 2(L3)+3(L1)} \\ & +3y & +3z & = 2 & : \text{(L'4) = (L1)+2(L4)} \end{cases} \iff \begin{cases} -2x & +y & +z & = 0 & \text{(L1)} \\ & -5y & +3z & = 0 & \text{(L'2)} \\ & +0 & +0 & = 0 & \text{(L'3)+(L'2)} \\ & & +24z & = 10 & \text{5(L'4)+3(L'2)} \end{cases}$$

On a donc $z = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ et on en déduit y et x soit $(S) \iff \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{5}{12} \end{cases}$

L'unique matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$, est $\boxed{U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}}$

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de M^n, n étant un entier naturel non nul :

Pour n entier non nul, on a : $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$

$$U_n = M^n U_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \\ b_n = \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \\ c_n = \left(\frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \end{cases}$$

On constate que $b_n = \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 = \frac{1}{4}\left(a_0 + b_0 + c_0\right)$; or $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ donc

$$\boxed{b_n = \frac{1}{4}}$$

Or par théorème

Théorème 1 (Limite d'une suite géométrique)

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et de ce fait

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n\times 2}{3} = 0$
- et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} = 0$

Donc

- $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 = \frac{1}{3}\left(a_0+b_0+c_0\right) = \frac{1}{3}}$.
- $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{5}{12}a_0 + \frac{5}{12}b_0 + \frac{5}{12}c_0 = \frac{5}{12}\left(a_0+b_0+c_0\right) = \frac{5}{12}}$

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n. En déduire que les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.

5. Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$ donc, à long terme, la page 1 du site sera consultée $100\times\frac{1}{3}\approx 33,33\,\%$ du temps de visite.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{4}$ donc, à long terme, la page 2 du site sera consultée $100\times\frac{1}{4} = 25\,\%$ du temps de visite.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{5}{12}$ donc à long terme, la page 3 du site sera consultée $100\times\frac{5}{12}\approx 41,67\,\%$ du temps de visite.

Exercice 4. Probabilités — 5 points

Commun à tous les candidats

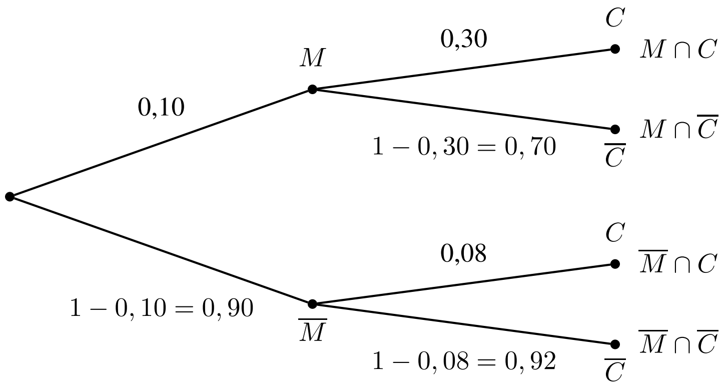
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :
M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. 1. a. $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$ soit $\boxed{P(M \cap C) = 3\%}$.

1. b. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right) \\ &= P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 \\ &= 0,03 + 0,072 = 0,102 \end{aligned}$$

$\boxed{P(C) = 10,2\%}$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.

La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:

$P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$ soit $\boxed{P_C(M) = 29,41\%}$

Partie B

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X.

On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.

Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après le texte.

Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2. Déterminer $P(X = 35)$.

Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400\,;0,1)$, $\boxed{P(X=35)=\binom{400}{35}0,1^{35}(1-0,1)^{400-35}\approx 0{,}049\,1}$

3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

La probabilité que 30 personnes, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(X \geqslant 30)$ or :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 30) &= 1-P(X<30)\\ &= 1-P(X\leqslant 29)\\ &\approx 1-0{,}035\,7 \end{aligned}$$

$\boxed{P(X \geqslant 30)\approx 96,43\%}$

Partie C

1. On considère la variable aléatoire F, définie par $F=\dfrac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la partie B. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

Théorème 2 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} ✓ & n \geq 30\\ ✓ & np \geq 5\\ ✓ & n(1-p)\geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est :

$$I_n=\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

où p désigne la proportion de ce caractère dans la population.

On a $n=400$, $p=10\%$ alors :

$$\text{Conditions}\quad : \begin{cases} ✓ & n=400\geq 30\\ ✓ & np=400\times 10\%=40\geq 5\\ ✓ & n(1-p)=400\times 90\%=360\geq 5 \end{cases}$$

On sait que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,,p)$, alors puisque les conditions rappelées ci-avant sont vérifiées, l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $F=\dfrac{X}{400}$ au seuil de 95 % est donné par :

$$I=\left[p-1,96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1,96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,1-1,96\frac{\sqrt{0,1\,(1-0,1)}}{\sqrt{400}}\,;\,0,1+1,96\frac{\sqrt{0,1\,(1-0,1)}}{\sqrt{400}}\right]$$

et donc

$$\boxed{I\approx\left[0{,}070\,6\,;\,0{,}129\,4\right]=\left[7,06\%\ ;\ 12,94\%\right]}$$

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme ;

$$\frac{60}{400}=15\%\notin I$$

Le taux de malades dans cet échantillon est anormalement élevé.