Math93.com

Devoir Surveillé n˚5

Fractions, niveau 1
Durée 1 heure - Coeff. 4
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est interdit. La rédaction et la présentation rapporteront 1 point sur les 20 points de ce devoir.

Exercice 1. Étude de fonctions (5 points)

Commun à tous les candidats
Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

1. a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.
Étudier le sens de variation de la fonction g.
Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$, la fonction g est dérivable comme produit de fonctions dérivable et :

$$g'(x) = \left(x^2\right)'\mathrm{e}^x + x^2\left(\mathrm{e}^x\right)'$$
$$g'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x$$

$$\boxed{g'(x) = \left(2x + x^2\right)\mathrm{e}^x}$$

Donc $g'(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ puisque :

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x & > 0 \quad ;\ \forall x \in]0\,;\,+\infty[\\ 2x + x^2 & > 0 \quad ;\ \forall x \in]0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc strictement croissante sur } [0\,;\,+\infty[}$.

1. b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

- Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}-1$	$\nearrow$	

  Avec

  $$g(0) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$$

  .
- **Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.**
  La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ avec $g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$. L'équation $g(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.
- **Application du TVI sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.**

> **Théorème 1** (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)
>
> Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
> alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche). Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano est le fils d'une germanophone et d'un émigré italien en Bohême, alors dans l'Empire d'Autriche. Dans son premier ouvrage *Rein analytischer Beweis*...(1817) il démontre le théorème des valeurs intermédiaires sans utiliser l'évidence géométrique comme on le faisait alors.

- La fonction g est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;
- L'image par g de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est $[-1\ ;\ \mathrm{e}\ -1]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k=0$ appartient à l'intervalle image $[-1\ ;\ \mathrm{e}\ -1]$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x)=k=0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } a \text{ appartenant à } [0\ ;\ +\infty[\text{ tel que } g(a)=0}.$$

- **Démontrer que a appartient à l'intervalle [0,703 ; 0,704[.**
  Pour avoir un encadrement de a, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

Avec un pas de $\Delta=0,1$ on obtient : $\begin{cases} g(0,7) & \approx & -0,013<0 \\ g(0,8) & \approx & 0,42>0 \end{cases}$, donc $0,7\leq a\leq 0,8$.

Avec un pas de $\Delta=0,01$ on obtient : $\begin{cases} g(0,7) & \approx & -0,013<0 \\ g(0,71) & \approx & 0,025>0 \end{cases}$, donc $0,7\leq a\leq 0,71$.

Avec un pas de $\Delta=0,001$ on obtient : $\begin{cases} g(0,703) & \approx & -0,0018<0 \\ g(0,704) & \approx & 0,002>0 \end{cases}$, donc $0,703\leq a\leq 0,704$.

Pour conclure : $\boxed{\text{la solution } a \text{ de l'équation } g(x)=0 \text{ appartient à l'intervalle }]0{,}703\ ;\ 0{,}704[}$

1. c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

D'après le tableau de variations de g :

$$\boxed{\begin{cases} g\left(x\right)<0 \ \text{ sur } \ [0\,;a[\\ g\left(x\right)>0 \ \text{ sur } \ ]a\,;+\infty[\end{cases}}$$

2. Étude de la fonction f

2. a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

On a :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\,x}=1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\,x}+\frac{1}{x}=+\infty$$

soit

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\left(x\right)=+\infty}$$

On a :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,x}+\frac{1}{x}=+\infty$$

et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty}$$

2. b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

$$\forall x\in]0\ ;\ +\infty[,\ \ f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$$

soit

$$\boxed{f'(x) = \mathrm{e}^{\,x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\,\mathrm{e}^{\,x} - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}}$$

2. c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
Pour tout x de $]0\,;\ +\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel .
D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.

$$f(a) = \mathrm{e}^{\,a} + \frac{1}{a}$$

Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc

$$g(a) = 0 \iff a^2\,\mathrm{e}^{\,a} - 1 = 0 \iff a^2\,\mathrm{e}^{\,a} = 1 \iff \mathrm{e}^{\,a} = \frac{1}{a^2}$$

On en déduit que

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}}$$

et on a donc démontré que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admettait pour minimum sur }]0\,;\ +\infty[\text{ le nombre réel } m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}}.$$

2. e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a^2} = \frac{1}{a^2}(a+1)$$

On a successivement (en valeurs approchées) :

$$\left[\begin{array}{ll} 0,703 < \ a \ < 0,704 & \\ 0,4942 < a^2 < 0,4957 & \text{: car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{1}{0,4957} < \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{0,4942} & \text{: car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ 2,017 < \dfrac{1}{a^2} < 2,024 & \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} 0,703 < a < 0,704 & \\ \dfrac{1}{0,704} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{0,703} & \text{: car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ 1,420 < \dfrac{1}{a} < 1,423 & \end{array}\right.$$

donc par somme :

$$2,017 + 1,420 < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < 2,024 + 1,423$$

et donc :

$$\boxed{3,43 < m < 3,45}$$

Exercice 2. Suite (5 points)

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

Partie A

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K+1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

État des variables :

K	W	U	V
0	—	2	10
1	2	$14/3$	8
2	$14/3$	$52/9$	$43/6$

Partie B

1. 1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12} \\ &= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)}$$

1. b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

On a donc d'après le cours :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n}$$

2. 2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n}{3} = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \dfrac{v_n - u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{w_n}{3} = \frac{8}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{4v_n}{4} = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante}}$.

2. b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à -dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant 10}$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n \geqslant 2}$.

2. c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

- La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel $\ell_1 \leq 10$.
- La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel l_2 avec $2 \leq \ell_2$.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

- La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_2 - \ell_1$.
- Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ avec $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc la suite (w_n) est convergente vers 0.
- La limite d'une suite est unique donc $\ell_2 - \ell_1 = 0$ et $\ell_2 = \ell_1$. Les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite notée ℓ.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} \\ &= 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ t_{n+1} &= 3u_n + 4v_n = t_n \end{aligned}$$

donc la suite (t_n) est constante.

$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$

Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = 7\ell$. La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \dfrac{46}{7}$.

$$\boxed{\text{La limite commune des suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ est donc } \frac{46}{7}}.$$

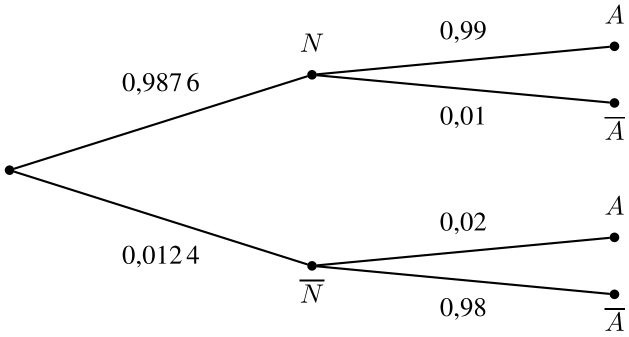
Exercice 3. Probabilités (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Montrer qu'une valeur approchée à 0,000 1 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4. On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.**
Une bille est dans la norme si son diamètre est entre 9 et 11 mm ; donc la probabilité qu'une bille soit dans la norme est $\boxed{P(9 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)}$.
La probabilité que la bille soit hors norme est donc :
$1 - (P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)) = 1 - (0{,}993\,790\,34 - 0{,}006\,209\,67) = 1 - 0{,}987\,580\,67 = 0{,}012\,419\,33$; donc une valeur approchée à 0,000 1 de $\boxed{\text{la probabilité qu'une bille soit hors norme est } 0{,}012\,4}$.

2. **2. a.** On construit un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé :



2. b. Calculer la probabilité de l'évènement A.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) \\
P(A) &= P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) \\
&= 0{,}987\,6 \times 0,99 + 0{,}012\,4 \times 0,02 \\
&= 0{,}977\,724 + 0{,}000\,248 \\
&= 0{,}977\,972
\end{aligned}$$

La probabilité de A arrondie au dix-millième est :

$$\boxed{P(A) \approx 0{,}978\,0}$$

2. c. Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?
On cherche : $P_A\left(\overline{N}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{N}\right)}{P(A)} = \dfrac{0{,}000\,248}{0{,}977\,972} \approx 0{,}000\,3$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'une bille acceptée soit hors norme est } 0{,}000\,3 \text{ (arrondie au dix-millième)}}$$

Partie B

1. **Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?**
La probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4 : on admet que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
Donc la variable aléatoire Y qui, à tout sac de 100 billes, associe le nombre de billes hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}012\,4$.

2. **Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?**

L'espérance mathématique et l'écart type d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p sont respectivement np et $\sqrt{np(1-p)}$. Donc

$$\boxed{E(Y) = np = 100 \times 0{,}012\,4 = 1,24}$$

et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}012\,4 \times 0{,}987\,6} \approx 1{,}106\,6$ soit

$$\boxed{\sigma(Y) \approx 1{,}106\,6}$$

3. La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme est $P(Y=2)$.

$P(Y=2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{100}{2} \times 0{,}012\,4^2 \times 0{,}987\,6^{\,98} \approx 0{,}022\,41.$

$$\boxed{P(Y=2) \approx 0{,}022\,41}$$

4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

Un sac de billes contient au plus une bille hors norme est l'événement $(Y \leqslant 1)$.

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) \\ &= \binom{100}{0} \times 0,0124^0 \times 0{,}987\,6^{\,100} + \binom{100}{1} \times 0{,}012\,4^1 \times 0{,}987\,6^{\,99} \end{aligned}$$

$\boxed{P(Y \leqslant 1) \approx 0{,}287\,1 + 0{,}360\,5 \approx 0{,}647\,6}$.

Exercice 4. Vrai/Faux sur les complexes (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1. VRAIE

Proposition 1

Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.

On a pour tout entier n :

$$(1+\mathrm{i})^{4n} = \left((1+\mathrm{i})^4\right)^n \text{ et } (1+\mathrm{i})^4 = \left((1+\mathrm{i})^2\right)^2$$

or

$$(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}$$

donc

$$(1+\mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4$$

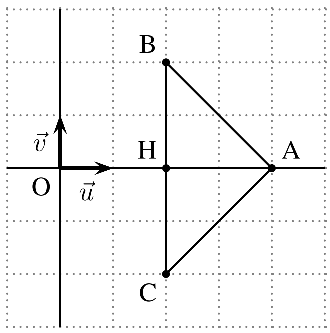
$$\boxed{(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n : \textbf{la proposition 1 est vraie}}$$

2. FAUSSE
Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Proposition 2

Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

On cherche les solutions de l'équation (E) : $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$.
Il y a $z = 4$ qui annule $z - 4$.
Pour $z^2 - 4z + 8 = 0$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 16 - 32 = -16 < 0$
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-(-4) + \mathrm{i}\sqrt{16}}{2} = \dfrac{4+4\mathrm{i}}{2} = 2 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$
L'équation (E) admet pour solutions $\left\{4,\ 2+2\mathrm{i}\ ,\ 2-2\mathrm{i}\right\}$.
Représentons les points dont les affixes sont solutions de (E) :



Le triangle ABC est isocèle en A car les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe $\left(\text{O}\ ,\overrightarrow{u}\right)$ et A appartient à cet axe ; donc le milieu H de [BC] est aussi le pied de la hauteur issue de A dans le triangle.
H a pour affixe 2 donc AH=2 ; de plus $\boxed{\text{BC} = |2+2\mathrm{i} - 2 + 2\mathrm{i}| = |4\mathrm{i}| =}$

L'aire de ce triangle vaut donc :
$\dfrac{\text{BC} \times \text{AH}}{2} = \dfrac{4 \times 2}{2} = 4$

La proposition 2 est donc fausse.

3. VRAIE

Proposition 3

Pour tout nombre réel α, $1+\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\alpha}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha)$.

Soit α un nombre réel quelconque ; on sait que $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$.

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{i}\,\alpha}&=1+\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\alpha}\right)^2=1+(\cos\alpha+\,\mathrm{i}\,\sin\alpha)^2=1+\cos^2\alpha+2\,\mathrm{i}\,\sin\alpha\cos\alpha+\,\mathrm{i}^{\,2}\sin^2\alpha\\&=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\,\mathrm{i}\,\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha+2\,\mathrm{i}\,\sin\alpha\cos\alpha\\&=2\,(\cos\alpha+\,\mathrm{i}\,\sin\alpha)\cos\alpha=2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\alpha}\cos\alpha\end{aligned}$$

La proposition 3 est donc vraie.

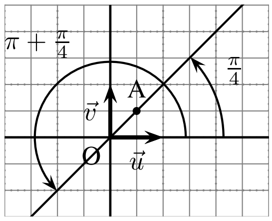
4. VRAIE

Proposition 4

Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}}=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

Le nombre complexe z_{A} a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$ donc le nombre complexe $(z_{\mathrm{A}})^n$ a pour argument $n\dfrac{\pi}{4}$ (argument d'un produit).

Les points O, A et M_n sont alignés si et seulement si l'argument de l'affixe de M_n est $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\pi+\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près.



On suppose que $n-1$ est divisible par 4 ; le nombre $n-1$ peut alors s'écrire $4k$ avec k entier et donc n s'écrit $4k+1$.
L'argument de l'affixe de M_n qui est $n\dfrac{\pi}{4}$ peut s'écrire $(4k+1)\,\dfrac{\pi}{4}=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ qui est bien équivalent à $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\pi+\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près ; donc si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés. **La proposition 4 est vraie.**

5. VRAIE

Proposition 5

Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$. Alors : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.

Le nombre j a pour module 1 et argument $\dfrac{2\pi}{3}$ donc j^2 a pour module $1^2=1$ et pour argument $2\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$.

On a : $\mathrm{j}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+\,\mathrm{i}\,\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (propriétés du cercle trigonométrique).

Et : $\mathrm{j}^2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+\,\mathrm{i}\,\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$. **La proposition 5 est vraie.**