Correction Baccalauréat S - Spécialité
Nouvelle Calédonie - Novembre 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. Étude de fonctions (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

1. 1. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

Étudier le sens de variation de la fonction g.

Pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction g est dérivable et :

$$g'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x}$$

Donc $g'(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc strictement croissante sur } [0\ ;\ +\infty[}.$$

1. 2. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

- Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}-1$	$\nearrow$	

  Avec

$$g(0) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$$

  .

- **Sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.**
  La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ avec $g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$. L'équation $g(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.

- **Application du TVI sur l'intervalle** $[0\ ;\ 1]$.

Théorème 1 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche). Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano est le fils d'une germanophone et d'un émigré italien en Bohême, alors dans l'Empire d'Autriche. Dans son premier ouvrage *Rein analytischer Beweis*...(1817) il démontre le théorème des valeurs intermédiaires sans utiliser l'évidence géométrique comme on le faisait alors.

- La fonction g est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;
- L'image par g de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est $[-1\ ;\ \mathrm{e}\ -1]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k=0$ appartient à l'intervalle image $[-1\ ;\ \mathrm{e}\ -1]$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x)=k=0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } a \text{ appartenant à } [0\ ;\ +\infty[\text{ tel que } g(a)=0}.$$

- **Démontrer que a appartient à l'intervalle [0,703 ; 0,704[.**
Pour avoir un encadrement de a, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

Avec un pas de $\Delta=0,1$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} g(0,7) & \approx & -0,013<0 \\ g(0,8) & \approx & 0,42>0 \end{array}\right.$, donc $0,7 \leq a \leq 0,8$.
Avec un pas de $\Delta=0,01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} g(0,7) & \approx & -0,013<0 \\ g(0,71) & \approx & 0,025>0 \end{array}\right.$, donc $0,7 \leq a \leq 0,71$.
Avec un pas de $\Delta=0,001$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} g(0,703) & \approx & -0,0018<0 \\ g(0,704) & \approx & 0,002>0 \end{array}\right.$, donc $0,703 \leq a \leq 0,704$.

Pour conclure : $\boxed{\text{la solution } a \text{ de l'équation } g(x)=0 \text{ appartient à l'intervalle }]0{,}703\ ;\ 0{,}704[}$

1. 3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

D'après le tableau de variations de g :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} g(x)<0 \text{ sur } [0\,;a[\\ g(x)>0 \text{ sur }]a\,;+\infty[\end{array}\right.}$$

2. Étude de la fonction f

2. 1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
On a :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{x}=1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \mathrm{e}^{x}+\frac{1}{x}=+\infty$$

soit

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x)=+\infty}$$

On a :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}+\frac{1}{x}=+\infty$$

et donc

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

2. 2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

$$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\quad f(x)=\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{x}$$

soit

$$\boxed{f'(x) = \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\,\mathrm{e}^{x} - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}}$$

2. 3. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. 4. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel .
D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.

$$f(a) = \mathrm{e}^{a} + \frac{1}{a}$$

Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc

$$g(a) = 0 \iff a^2\,\mathrm{e}^{a} - 1 = 0 \iff a^2\,\mathrm{e}^{a} = 1 \iff \mathrm{e}^{a} = \frac{1}{a^2}$$

On en déduit que

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}}$$

et on a donc démontré que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admettait pour minimum sur }]0\,;\,+\infty[\text{ le nombre réel } m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}}.$$

2. 5. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a^2} = \frac{1}{a^2}(a+1)$$

On a successivement (en valeurs approchées) :

$$\left[\begin{array}{ll} 0,703 < \ a \ < 0,704 & \\ 0,4942 < a^2 < 0,4957 & \text{: car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{1}{0,4957} < \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{0,4942} & \text{: car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ 2,017 < \dfrac{1}{a^2} < 2,024 & \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} 0,703 < a < 0,704 & \\ \dfrac{1}{0,704} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{0,703} & \text{: car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ 1,420 < \dfrac{1}{a} < 1,423 & \end{array}\right.$$

donc par somme :

$$2,017 + 1,420 < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < 2,024 + 1,423$$

et donc :

$$\boxed{3,43 < m < 3,45}$$

Exercice 2. Suite (5 points)

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

Partie A

```
Variables :   N est un entier
              U, V, W sont des réels
              K est un entier
Début :       Affecter 0 à K
              Affecter 2 à U
              Affecter 10 à V
              Saisir N
              Tant que K < N
                  Affecter K + 1 à K
                  Affecter U à W
                  Affecter (2U + V)/3 à U
                  Affecter (W + 3V)/4 à V
              Fin tant que
              Afficher U
              Afficher V
Fin
```

État des variables :

K	W	U	V
0	—	2	10
1	2	$14/3$	8
2	$14/3$	$52/9$	$43/6$

Partie B

1. **1. 1. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.**

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}$$

$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)}$$

1. 2. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

On a donc d'après le cours :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n}$$

2. **2. 1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.**

Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n}{3} = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n = \frac{w_n}{3} = \frac{8}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{4v_n}{4} = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante}}$.

2. 2. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à -dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant 10}$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n \geqslant 2}$.

2. 3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

- La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel $\ell_1 \leq 10$.
- La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel l_2 avec $2 \leq \ell_2$.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

- La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_2 - \ell_1$.
- Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ avec $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc la suite (w_n) est convergente vers 0.
- La limite d'une suite est unique donc $\ell_2 - \ell_1 = 0$ et $\ell_2 = \ell_1$. Les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite notée ℓ.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} \\ &= 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ t_{n+1} &= 3u_n + 4v_n = t_n \end{aligned}$$

donc la suite (t_n) est constante.

$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$

Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = 7\ell$. La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \dfrac{46}{7}$.

$$\boxed{\text{La limite commune des suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ est donc } \frac{46}{7}}.$$

Exercice 3. Probabilités (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

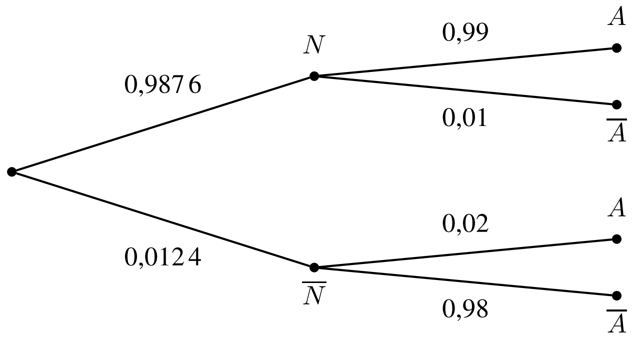
1. Montrer qu'une valeur approchée à 0,000 1 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4. On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

Une bille est dans la norme si son diamètre est entre 9 et 11 mm ; donc la probabilité qu'une bille soit dans la norme est $\boxed{P(9 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)}$.

La probabilité que la bille soit hors norme est donc :

$1 - (P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)) = 1 - (0{,}993\,790\,34 - 0{,}006\,209\,67) = 1 - 0{,}987\,580\,67 = 0{,}012\,419\,33$; donc une valeur approchée à 0,000 1 de $\boxed{\text{la probabilité qu'une bille soit hors norme est } 0{,}012\,4}$.

2. 2. 1. On construit un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé :



2. 2. Calculer la probabilité de l'évènement A.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) \\
P(A) &= P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) \\
&= 0{,}987\,6 \times 0,99 + 0{,}012\,4 \times 0,02 \\
&= 0{,}977\,724 + 0{,}000\,248 \\
&= 0{,}977\,972
\end{aligned}$$

La probabilité de A arrondie au dix-millième est :

$$\boxed{P(A) \approx 0{,}978\,0}$$

2. 3. Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

On cherche : $P_A\left(\overline{N}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{N}\right)}{P(A)} = \dfrac{0{,}000\,248}{0{,}977\,972} \approx 0{,}000\,3$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'une bille acceptée soit hors norme est } 0{,}000\,3 \text{ (arrondie au dix-millième)}}$$

Partie B

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

La probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4 : on admet que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

Donc la variable aléatoire Y qui, à tout sac de 100 billes, associe le nombre de billes hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}012\,4$.

2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

L'espérance mathématique et l'écart type d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p sont respectivement np et $\sqrt{np(1-p)}$. Donc

$$\boxed{E(Y) = np = 100 \times 0{,}012\,4 = 1,24}$$

et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}012\,4 \times 0{,}987\,6} \approx 1{,}106\,6$ soit

$$\boxed{\sigma(Y) \approx 1{,}106\,6}$$

3. La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme est $P(Y = 2)$.

$P(Y=2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{100}{2} \times 0{,}012\,4^2 \times 0{,}987\,6^{\,98} \approx 0{,}022\,41.$

$$\boxed{P(Y=2) \approx 0{,}022\,41}$$

4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

Un sac de billes contient au plus une bille hors norme est l'événement $(Y \leqslant 1)$.

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) \\ &= \binom{100}{0} \times 0,0124^0 \times 0{,}987\,6^{\,100} + \binom{100}{1} \times 0{,}012\,4^1 \times 0{,}987\,6^{\,99} \end{aligned}$$

$\boxed{P(Y \leqslant 1) \approx 0{,}287\,1 + 0{,}360\,5 \approx 0{,}647\,6}$.

Exercice 4. Arithmétique (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Trouver tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$ c'est-à -dire invariants par g.

On cherche tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$:

$$g(x) = x \iff 4x + 3 \equiv x \pmod{27} \iff 3x \equiv -3 \pmod{27}$$

De ce fait :

$$\begin{array}{rrcl} & 3x = -3 + 27k & (k \in \mathbb{Z}) & \\ x \in E \iff & 0 \leqslant & x & \leqslant 26 \\ & 0 \leqslant & 3x & \leqslant 81 \\ \text{or } 3x = -3+27k \text{ donc} & 0 \leqslant & -3+27k & \leqslant 81 \\ & 3 \leqslant & 27k & \leqslant 84 \\ & \dfrac{3}{27} \leqslant & k & \leqslant \dfrac{84}{27} \end{array}$$

Or k est entier donc $k \in \{1, 2, 3\}$.

- Pour $k = 1$, $3x = -3 + 27 = 24$ donc $x = 8$;
- pour $k = 2$, $3x = -3 + 54 = 51$ donc $x = 17$;
- pour $k = 3$, $3x = -3 + 81 = 78$ donc $x = 26$.

$$\boxed{\text{Les éléments de } E \text{ invariants par } g \text{ sont 8, 17 et 26}}$$

Les caractères invariants dans ce codage sont les caractères correspondant à 8,17 et 26 donc ce sont les caractères :

$$\boxed{i, r \text{ et } \star}$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E, si $y \equiv 4x + 3$ modulo 27 alors $x \equiv 7y + 6$ modulo 27.

Soient x et y deux éléments de E tels que $y \equiv 4x + 3 \pmod{27}$.

$y \equiv 4x + 3 \pmod{27} \iff 7y \equiv 28x + 21 \pmod{27}$;
or $21 \equiv -6 \pmod{27}$ et $28 \equiv 1 \pmod{27}$ donc $28x \equiv x \pmod{27}$

$$\begin{aligned} 7y \equiv 28x + 21 \pmod{27} &\iff 7y \equiv x - 6 \pmod{27} \iff 7y + 6 \equiv x \pmod{27} \\ &\iff x \equiv 7y + 6 \pmod{27} \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe deux caractères x et x' de E qui se codent par le même caractère y de E.

On a alors $x \equiv 7y + 6 \pmod{27}$ et $x' \equiv 7y + 6 \pmod{27}$ ce qui entraîne $x \equiv x' \pmod{27}$ donc on peut écrire $x = x' + 27k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Or

$$0 \leqslant x \leqslant 26 \text{ et } 0 \leqslant x' \leqslant 26 \text{ donc } k = 0 \text{ et } x = x'$$

Deux caractères distincts ne sont pas codés par un même caractère, donc **deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts**.

3. Proposer une méthode de décodage.

Une méthode de décodage consiste à utiliser la méthode de codage, en remplaçant la fonction g par la fonction f qui, à chaque élément y de E, associe le reste de la division euclidienne de $7y + 6$ par 27.

4. Décoder le mot « $v f v$ ».

On sait que la lettre s se code en la lettre v, donc la lettre v se décode en s.

La lettre f correspond au nombre $y = 5$; $7y + 6 = 7 \times 5 + 6 = 35 + 6 = 41$.
Or $41 = 27 \times 1 + 14$ donc 14 est le reste de la division de 41 par 27.
Le nombre 14 correspond à la lettre o.

Donc

$$\boxed{v\,f\,v \text{ se décode en } s\,o\,s}$$