Baccalauréat S Pondichéry 8 avril 2014
Corrigé

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

   D'après le cours : $P(X \in [a\,;b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_a^b = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$ où $a > 0$ et $b > 0$.

   Donc pour $t > 0$, $P(X \leqslant t) = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

   $P(X \leqslant 2) = 0{,}15 \iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\times 2} = 0{,}15 \iff 0{,}85 = \mathrm{e}^{-2\lambda} \iff \ln(0{,}85) = -2\lambda \iff \dfrac{\ln(0{,}85)}{-2} = \lambda$

   $\iff \lambda = -\dfrac{\ln(0{,}85)}{2}$

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

2. **a.** Pour $t > 0$: $P(X \geqslant t) = 1 - P(X < t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   Donc $P(X \geqslant 3) = \mathrm{e}^{-3\times 0{,}081} \approx 0{,}78$

   b. Pour tous réels positifs t et h : $P(X \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $P(X \geqslant t+h) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}$

   $$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = \frac{P\left[(X \geqslant t)\cap(X \geqslant t+h)\right]}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)}$$
   $$= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\times \mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(X \geqslant h)$$

   c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans.
   La probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans est $P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2)$.
   D'après le cours : $P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

   d. D'après le cours, pour une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

   Donc $E(X) = \dfrac{1}{0{,}081} \approx 12{,}35$.

   Ce qui veut dire que la durée moyenne de vie d'un moteur est de 12,35 années.

3. L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard.

   Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :
   $$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p\left(1-p\right)}}{\sqrt{n}}\,;p + 1{,}96\frac{\sqrt{p\left(1-p\right)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   sous les trois conditions : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

   L'échantillon de l'enquête est de taille $n = 800$ et l'entreprise annonce que le pourcentage de moteurs défectueux est égal à 1 % donc $p = 0{,}01$.

   Regardons si les trois conditions sont vérifiées :
   $n = 800 \geqslant 30$, $np = 800\times 0{,}01 = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 800\times 0{,}99 = 792 \geqslant 5$.

   L'intervalle est : $I = \left[0{,}01 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}01\,(1-0{,}01)}}{\sqrt{800}}\,;0{,}01 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}01\,(1-0{,}01)}}{\sqrt{800}}\right] \approx [0{,}003\,;0{,}017]$.

   On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux sur 800, ce qui fait une proportion de $\dfrac{15}{800} = 0{,}01875$; or $0{,}01875 \notin I$ donc le résultat de ce test remet en question l'annonce de l'entreprise A.

EXERCICE 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **Proposition 1** : toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.
   C'est faux car tout suite croissante majorée est convergente donc a une limite finie (c'est le théorème de la croissance majorée). Donc on peut trouver une suite positive croissante qui converge, par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$.
   Proposition fausse.
2. g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.
   Proposition 2 : sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.
   $g(x) = 2x\ln(2x+1)$ donc $g(0) = 0$; l'équation $g(x) = 2x$ admet donc pour solution $x = 0$ donc : **proposition fausse.**

   Proposition 3 : le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

   $g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x \times \dfrac{2}{2x+1}$ donc $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln 2 + 1$; or $2\ln 2 = \ln 2^2 = \ln 4$ donc le coefficient directeur de la tangente est égal à $1 + \ln 4$.
   Proposition vraie.
3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x + 3y - z - 11 = 0$ et $x + y + 5z - 11 = 0$.
   Proposition 4 : les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement.
   Le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + 3y - z - 11 = 0$ a pour vecteur normal $n_{\mathscr{P}}(2\,;3\,;-1)$.
   Le plan $\mathscr{R}$ d'équation $x + y + 5z - 11 = 0$ a pour vecteur normal $n_{\mathscr{R}}(1\,;1\,;5)$.
   Le produit scalaire de ces deux vecteurs est $2 \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 5 = 0$ donc les deux vecteurs sont orthogonaux et donc les deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement.
   Proposition vraie.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. $\left|\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{16}} = \sqrt{\dfrac{12}{16}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

   Or $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

   Donc le nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ a pour module $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\dfrac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. **a.** $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right) z_n\right| = \left|\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right| \times |z_n| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_n$

Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = 1$.

b. La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout n, $r_n = r_0 \times q^n$, donc $r_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

c. $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

(r_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc la suite (r_n) converge vers 0. La longueur OA_n tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. **a.** On fait tourner l'algorithme donné dans le texte en prenant pour P la valeur 0,5 :

	n	R	P	$R > P$
Initialisations	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,6495	0,5	Vrai
	4	0,5625	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	Afficher 5			

La valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$ est 5.

b. Cet algorithme s'arrête dès que $R \leqslant P$ et affiche alors n, c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R donc $r_n = OA_n$ est inférieur ou égal à P.
On peut donc dire que $OA_{32} > 0,01$ et que $OA_{33} \leqslant 0,01$.
Vérification à la calculatrice : $r_{32} \approx 0,010\,02$ et $r_{33} \approx 0,008\,68$.

4. **a.** On considère le triangle OA_nA_{n+1}.
$OA_n = r_n$ donc $(OA_n)^2 = r_n^2$

$OA_{n+1} = r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_n$ donc $(OA_{n+1})^2 = \dfrac{3}{4} r_n^2$

$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right) z_n - z_n\right| = \left|\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i} - 1\right) z_n\right| = \left|-\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right| \times |z_n|$

$= \sqrt{\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \times r_n = \sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{16}}\, r_n = \sqrt{\dfrac{4}{16}}\, r_n = \dfrac{1}{2} r_n$ donc $(A_nA_{n+1})^2 = \dfrac{1}{4} r_n^2$

$(A_nA_{n+1})^2 + (OA_{n+1})^2 = \dfrac{1}{4} r_n^2 + \dfrac{3}{4} r_n^2 = r_n^2 = (OA_n)^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b. On admet que $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.
Le point A_n, d'affixe z_n, appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est $\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$ modulo 2π, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π, donc il peut s'écrire $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Le nombre z_n a pour argument $\dfrac{n\pi}{6}$; $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \iff n = 3 + 6k$.
Mais n est un entier naturel donc k doit être strictement positif donc appartenir à $\mathbb{N}$.
Donc si n s'écrit $3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors le point A_n appartient à l'axe des ordonnées.

c. Le point A_6 a pour affixe z_6 qui a pour argument $\dfrac{6\pi}{6} = \pi$; ce point est donc sur l'axe des abscisses. Comme le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_6, on trace le cercle de diamètre $[OA_5]$; le point A_6 est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses.

Le point A_7 a pour affixe z_7 qui a pour argument $\dfrac{7\pi}{6}$; donc les points A_1, O et A_7 sont alignés.
Le point A_7 se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre $[OA_6]$ et de la droite (OA_1).
Etc. (Voir figure en annexe)
Remarque : les points A_3 et A_9 appartiennent à l'axe des ordonnées, ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question **4.b.**

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats ayant suivi la spécialité

1. **a.** D'après le texte, les acheteurs de la marque X le mois $n+1$ sont formés de 50 % des acheteurs de X le mois n donc $0{,}5x_n$, de 50 % des acheteurs de Y le mois n donc $0{,}5y_n$, et de 10 % des acheteurs de Z le mois n donc $0{,}1z_n$; on a donc $x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}5y_n + 0{,}1z_n$.
On admet que : $y_{n+1} = 0{,}4x_n + 0{,}3y_n + 0{,}2z_n$ et que $z_{n+1} = 0{,}1x_n + 0{,}2y_n + 0{,}7z_n$.

   b. D'après le texte, on peut dire que pour tout n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0{,}5x_n + 0{,}5y_n + 0{,}1z_n = 0{,}5x_n + 0{,}5y_n + 0{,}1(1 - x_n - y_n)\\ &= 0{,}5x_n + 0{,}5y_n + 0{,}1 - 0{,}1x_n - 0{,}1y_n = 0{,}4x_n + 0{,}4y_n + 0{,}1\\ y_{n+1} &= 0{,}4x_n + 0{,}3y_n + 0{,}2z_n = 0{,}4x_n + 0{,}3y_n + 0{,}2(1 - x_n - y_n)\\ &= 0{,}4x_n + 0{,}3y_n + 0{,}2 - 0{,}2x_n - 0{,}2y_n = 0{,}2x_n + 0{,}1y_n + 0{,}2\end{aligned}$$

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

   On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

   Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$.

   a. En faisant tourner l'algorithme donné dans le texte, pour $n = 1$ on entre une fois dans la boucle TANT QUE ; on va donc appliquer une fois l'instruction « U prend la valeur $A \times U + B$ ».
La valeur de U en entrée de boucle est $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$, donc la valeur affichée en sortie est :
$$U_1 = A \times U_0 + B = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$$
Pour $n = 3$, l'algorithme calcule successivement U_1 puis
$U_2 = A \times U_1 + B = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}317 \end{pmatrix}$ puis
$U_3 = A \times U_2 + B = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}317 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3868 \\ 0{,}3117 \end{pmatrix}$
L'affichage obtenu pour $n = 3$ est $\begin{pmatrix} 0{,}3868 \\ 0{,}3117 \end{pmatrix}$.

   b. Le mois de janvier correspond à $n = 0$, donc le mois d'avril correspond à $n = 3$.
La matrice U_3 est la matrice $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3868 \\ 0{,}3117 \end{pmatrix}$
Donc la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril est $x_3 = 0{,}3868$.

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.
On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

   a. I est la matrice unité d'ordre 2 donc $I \times C = C$.
$C = A \times C + B \iff I \times C - A \times C = B \iff (I - A) \times C = B \iff N \times C = B$

   b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{45}{23} & \dfrac{20}{23} \\ \dfrac{10}{23} & \dfrac{30}{23} \end{pmatrix}$.

$$N\times C = B \iff C = N^{-1}\times B \iff C = \begin{pmatrix}\frac{45}{23} & \frac{20}{23}\\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}2\end{pmatrix} \iff C = \begin{pmatrix}\frac{45}{23} & \frac{20}{23}\\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{10}\\ \frac{2}{10}\end{pmatrix} \iff$$

$$C = \begin{pmatrix}\frac{45}{23}\times\frac{1}{10}+\frac{20}{23}\times\frac{2}{10}\\ \frac{10}{23}\times\frac{1}{10}+\frac{30}{23}\times\frac{2}{10}\end{pmatrix} \iff C = \begin{pmatrix}\frac{45}{230}+\frac{40}{230}\\ \frac{10}{230}+\frac{60}{230}\end{pmatrix} \iff C = \begin{pmatrix}\frac{85}{230}\\ \frac{70}{230}\end{pmatrix} \iff C = \begin{pmatrix}\frac{17}{46}\\ \frac{7}{23}\end{pmatrix}$$

4. On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

a. $V_{n+1} = U_{n+1} - C = A\times U_n + B - C$; or la matrice C est définie par $C = A\times C + B$.
Donc $V_{n+1} = A\times U_n + B - A\times C - B = A\times(U_n - C) = A\times V_n$

b. On admet que $U_n = A^n\times(U_0 - C) + C$.

> Remarque : ce résultat s'obtient en partant de l'égalité $V_{n+1} = A\times V_n$; on pourrait démontrer par récurrence que, pour tout n, $V_n = A^n\times V_0$ ce qui équivaut à $U_n - C = A^n\times(U_0 - C)$ ou encore $U_n = A^n\times(U_0 - C) + C$.

Le mois de janvier correspond à $n = 0$ donc le mois de mai correspond à $n = 4$. Les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai sont respectivement x_4, y_4 et z_4.
On cherche donc U_4 qui donnera x_4 et y_4 ; puis on calculera $z_4 = 1 - x_4 - y_4$.
À la calculatrice, on trouve : $U_4 = A^4\times(U_0 - C) + C = \begin{pmatrix}0{,}3794\\0{,}30853\end{pmatrix}$
De plus, $1 - 0{,}3794 - 0{,}30853 = 0{,}31207$.
Donc les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai sont respectivement $x_4 = 0{,}3794$, $y_4 = 0{,}30853$ et $z_4 = 0{,}31207$.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f' ; A $(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_1$ et B $(0\ ;\ 1) \in \mathscr{C}_2$.

1. La fonction f est décroissante puis croissante, donc la fonction dérivée doit être négative puis positive, ce qui élimine la situation 3.
Si la fonction dérivée est représentée par une droite comme dans la situation 2, c'est que la fonction f est une fonction du second degré ; donc sa représentation graphique possède un axe de symétrie vertical. Ce n'est pas le cas donc on peut éliminer la situation 2.
La bonne situation est donc la situation 1.

2. La droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A d'abscisse 0, a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
$f(0)$ est l'ordonnée de A donc $f(0) = 2$; $f'(0)$ est l'ordonnée du point B donc $f'(0) = 1$.
L'équation réduite de la tangente est donc : $y = x + 2$.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a. $f(0) = 2 \iff \mathrm{e}^0 + 2\times 0 + b = 2 \iff 1 + b = 2 \iff b = 1$

b. $b = 2$ donc $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + 1$ donc
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + a$; or $f'(0) = 1 \iff -\mathrm{e}^0 + a = 1 \iff 1 + a = 1 \iff a = 2$
Donc $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$

4. On a vu que $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + a$ et comme $a = 2$, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2$.
$f'(x) > 0 \iff -\mathrm{e}^{-x} + 2 > 0 \iff 2 > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln 2 > -x \iff -\ln 2 < x$
Donc :
- la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-\ln 2]$;
- la fonction f admet un minimum pour $x = -\ln 2$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln 2\,;+\infty[$.

5. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1. a. $g'(x) = f'(x) - 1 = -\mathrm{e}^{-x} + 2 - 1 = -\mathrm{e}^{-x} + 1$.

$g'(x) > 0 \iff -\mathrm{e}^{-x} + 1 > 0 \iff 1 > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln 1 > -x \iff x > 0$

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; la fonction g admet donc un minimum en $x = 0$. Ce minimum vaut $g(0) = f(0) - (0+2) = 2 - 2 = 0$.

b. D'après la question précédente, pour tout réel x : $g(x) \geqslant 0$ donc $f(x) - (x+2) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant x+2$ ce qui veut dire que la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$.

2. On a vu que la courbe $\mathscr{C}_1$ était au dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$ donc c'est vrai sur $[-2\,;2]$.

De plus, la courbe $\mathscr{C}_1$ et la droite Δ sont toutes les deux au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

L'aire de la partie grisée est égale à la différence de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_1$ entre $x = -2$ et $x = 2$, et l'aire sous la droite entre $x = -2$ et $x = 2$.

Autrement dit cette aire est égale à $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} (x+2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} f(x) - (x+2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x$

$g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1 - x - 2 = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$;

donc g a pour primitive la fonction G telle que $G(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = G(2) - G(-2) &= \left[-\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-2}^{2} = \left(-\mathrm{e}^{-2} + \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(-\mathrm{e}^{-(-2)} + \frac{(-2)^2}{2} - (-2)\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-2} + 2 - 2 + \mathrm{e}^{2} - 2 - 2 = \mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2} - 4\\ &\approx 3{,}25 \text{ unités d'aire.}\end{aligned}$$

ANNEXE EXERCICE 3 NON SPÉCIALITÉ