



Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S Pondichéry

Série S Obligatoire
Mardi 8 Avril 2014
Correction

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter



Exercice 1. Loi de probabilité

4 points

Commun à tous les candidats

Tout sera arrondi au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif. On sait que $P(X \leq 2) = 0,15$.

Déterminons la valeur exacte du réel λ .

Puisque X suit une loi exponentielle de paramètre λ , pour tout réel b on a :

$$P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$$

soit pour $b = 2$

$$P(X \leq 2) = 1 - e^{-2\lambda}$$

or $P(X \leq 2) = 0,15$ donc

$$\begin{aligned} 0,15 &= 1 - e^{-2\lambda} \\ e^{-2\lambda} &= 0,85 \end{aligned}$$

soit

$$-2\lambda = \ln 0,85$$

On en déduit que

$$\lambda = -\frac{\ln 0,85}{2} \approx 0,081$$

2. Dans la suite de l'exercice on prendra **0,081 pour valeur de λ .**

2. a. Déterminer $P(X \geq 3)$.

Puisque X suit une loi exponentielle de paramètre λ , pour tout réel a on a :

$$P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$$

soit pour $a = 3$ et $\lambda = 0,081$

$$P(X \geq 3) = e^{-3 \times 0,081}$$

On en déduit que

$$P(X \geq 3) \approx 0,78$$



2. b. Montrons que pour tous réels positifs t et h , $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

Soit A l'évènement « $X \geq t + h$ » et B l'évènement « $X \geq t$ ». On a de façon évidente

$$A \subset B \text{ et donc } A \cap B = A$$

De ce fait pour tous réels positifs t et h :

$$\begin{aligned} P_{X \geq t}(X \geq t + h) &= P_B(A) \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geq h) \end{aligned}$$

soit

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

2. c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

En notant B l'évènement « Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans » et A l'évènement « Le moteur fonctionne durant 2 ans de plus » on a $B = (X \geq 3)$ et $A = (X \geq 3 + 2)$. De ce fait, la probabilité cherchée correspond à :

$$P_B(A) = P_{X \geq 3}(X \geq 3 + 2)$$

d'après la question 2b on obtient alors

$$\begin{aligned} P_B(A) &= P(X \geq 2) \\ &= e^{-2 \times 0,081} \\ P_B(A) &\approx 0,85 \end{aligned}$$

Le moteur ayant fonctionné durant 3 ans, la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans est donc de **0,85** (arrondie au centième).

2. d. L'espérance de la variable aléatoire X est

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,081} \approx 12,35$$

ce qui donne la **durée de vie moyenne, en année**, d'un moteur fabriqué par l'entreprise A.



3. Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}

- L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à $p = 1\%$.
- Afin de vérifier cette affirmation $n = 800$ moteurs sont prélevés au hasard.
- On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux donc la fréquence observée est $f = \frac{15}{800} = 0,01875 = 1,875\%$.

On va regarder si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique. Si c'est le cas, on considérera que l'entreprise a raison au seuil de 95%

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est :

$$I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

où p désigne la proportion de ce caractère dans la population.

On a $n = 800$, $p = 1\%$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 800 \geq 30 \\ \checkmark & np = 800 \times 1\% = 8 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 800 \times 99\% = 792 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions de validité sont réunies donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F_{800} est :

$$I_{800} = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,01 - 1,96 \frac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{800}} ; 0,01 + 1,96 \frac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{800}} \right]$$

soit

$$I \approx [0,3\% ; 1,7\%]$$

La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation $f = 1,875\% \notin I_{800}$, donc on rejette l'hypothèse. **L'annonce de l'entreprise est rejetée au seuil de 95%.**

On applique en fait la propriété suivante :

Propriété 1

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un caractère est p . On observe f comme fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille n . Si I_n est l'intervalle de fluctuation de la fréquence à 95% dans les échantillons de tailles n , alors la **règle de décision** est la suivante :

- si $f \in I_n$: on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en cause et on l'**accepte** ;
- si $f \notin I_n$: on **rejette** l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p .



Exercice 2. Vrai ou Faux

4 points

Commun à tous les candidats

1. Proposition 1 : La proposition est fausse

Proposition 1 (Faux)

Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

Il suffit d'exhiber un contre exemple. Par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n}$$

- Cette suite est clairement **positive** puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n} \leq 1$$

- De plus est **croissante** puisque pour tout entier n non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

- Or cette suite tend vers 1 ce qui contredit la proposition 1.

2. g est la fonction définie sur $] -0,5 ; +\infty[$ par $g(x) = 2x \ln(2x + 1)$.

Proposition 2 (Faux)

Sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{e-1}{2}$.

Pour tout réel x de l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$

$$\begin{aligned} g(x) = 2x &\iff 2x \ln(2x + 1) = 2x \\ &\iff 2x \ln(2x + 1) - 2x = 0 \\ &\iff 2x (\ln(2x + 1) - 1) = 0 \end{aligned}$$

Or cette équation admet aussi $x = 0 \in] -0,5 ; +\infty[$ comme solution évidente ce qui contredit la proposition 2.

Proposition 3 (Vraie)

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est donné par $g'(\frac{1}{2})$.
La fonction g est dérivable sur $] -0,5 ; +\infty[$. On a en appliquant la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} \forall x \in] -0,5 ; +\infty[; g'(x) &= (2x)' \ln(2x + 1) + 2x (\ln(2x + 1))' \\ g'(x) &= 2 \ln(2x + 1) + 2x \times \frac{2}{2x + 1} \end{aligned}$$



on a pour $x = 0,5$

$$g'(0,5) = 2 \ln 2 + 1$$

soit

$$g'(0,5) = \ln 4 + 1$$

3. Proposition 4

Proposition 4 (Vraie)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x + 3y - z - 11 = 0$ et $x + y + 5z - 11 = 0$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ se coupent perpendiculairement.

- Les vecteurs normaux respectivement aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont : $\vec{n}_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \vec{n}_{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} ;$
- Les vecteurs normaux des deux plans sont orthogonaux puisque

$$\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}} = 2 + 3 - 5 = 0$$

donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.



Exercice 3. Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

5 points

1. **Forme exponentielle de $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.**

- **Module** : $\left| \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{12}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- **Argument** : Si on note θ_1 un argument de z_1 on a,
$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ donc } \theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

On en déduit que :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i \frac{\pi}{6}}$$

2.

2. a. **Montrons que le suite (r_n) est géométrique.**

Pour tout entier naturel n on a d'après la question 1°) $r_0 = 1$ et :

$$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i \frac{\pi}{6}} \right) z_n$$

donc en passant au module on obtient :

$$r_{n+1} = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i \frac{\pi}{6}} \right| r_n$$

soit

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$$

De ce fait, la suite (r_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = 1$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$$

2. b. **Limite de OA_n .**

- La suite (r_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2} \in]-1 ; 1[$, de ce fait elle tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- En outre A_n étant le point d'affixe z_n on a : $OA_n = |z_n| = r_n$

De ce fait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n = 0$$

3. Algorithme.

3. a. Pour $P = 0,5$, l'algorithme affiche $n = 5$, en effet on a :

	n	R	P	Test du <i>tant que</i> : $R > P$
Initialisations	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,6495	0,5	Vrai
	4	0,5625	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	Afficher 5			

3. b. Cet algorithme calcule le **premier rang n_0 à partir duquel r_{n_0} est inférieur ou égal à P** .

Même si ce n'est pas demandé, on peut vérifier cette assertion.

Pour $P = 0,01$, cela revient à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $r_n \leq 0,01$.

$$r_n \leq 0,01 \iff \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \leq 0,01$$

en composant par la fonction $\ln$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} r_n \leq 0,01 &\iff n \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq \ln 0,01 \\ &\iff n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 32,016 \end{aligned}$$

Le **premier entier qui vérifie cette inéquation est bien $n = 33$** .

4. Construction.

4. a. Montrons que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

En utilisant le fait que : $r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$, et que : $z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)z_n$, on a

$$\begin{aligned} (OA_{n+1})^2 + (A_{n+1}A_n)^2 &= (r_{n+1})^2 + |z_{n+1} - z_n|^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_n\right)^2 + \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)z_n - z_n\right|^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 r_n^2 + \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right) - 1\right|^2 |z_n|^2 \\ &= r_n^2 \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} - 1\right|^2\right) \end{aligned}$$

En utilisant la question 1°) : $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc

$$= r_n^2 \left(\left(\frac{3}{4}\right) + \left|\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - 1\right|^2\right)$$

soit

$$\begin{aligned}
 &= r_n^2 \left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4} - 1 \right)^2 + \frac{3}{16} \right) \\
 &= r_n^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} \right) \\
 &= r_n^2 = (OA_n)^2
 \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout entier n on a :

$$(OA_{n+1})^2 + (A_{n+1}A_n)^2 = (OA_n)^2$$

de ce fait, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .**

Remarque : Pour cette question, on pouvait aussi utiliser un calcul d'argument.

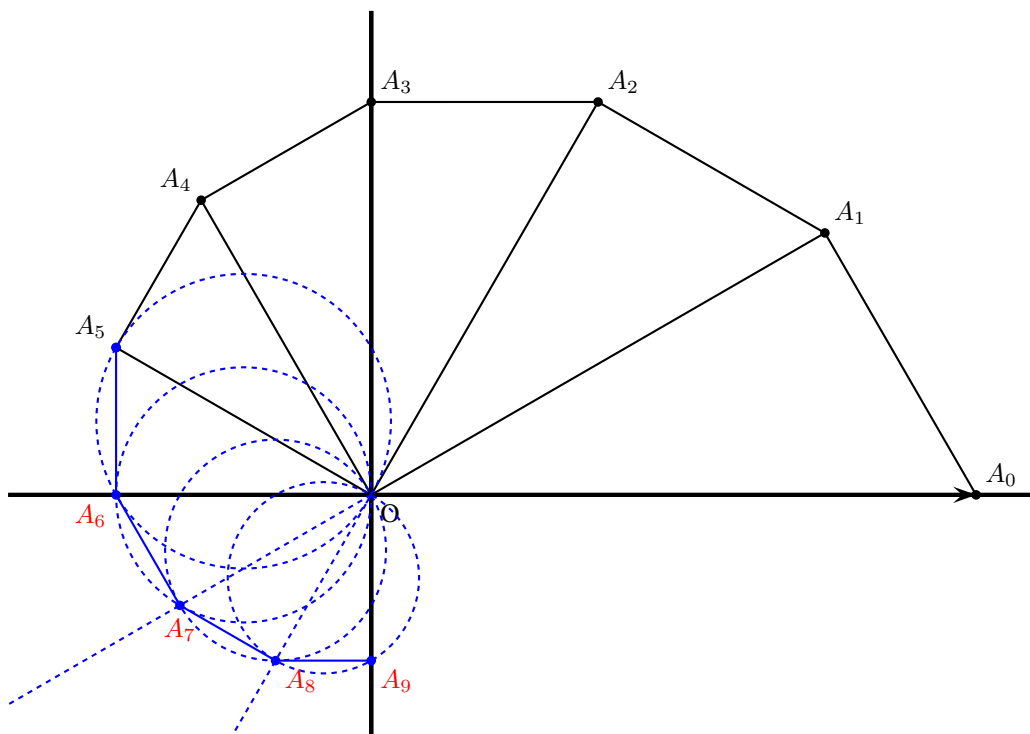
4. b. Supposons que $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$, alors pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
 A_n(z_n) \in (Oy) &\iff \arg z_n = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} ; n \in \mathbb{N} \\
 &\iff n\pi = 3\pi + 6k\pi ; k \in \mathbb{Z} ; n \in \mathbb{N} \\
 &\iff n = 3 + 6k ; k \in \mathbb{Z} ; n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées sont donc de la forme $n = 3 + 6k ; k \in \mathbb{N}$. Cela correspond donc aux points : $A_3, A_9, A_{15}, \dots, A_{3+6k}, \dots ; k \in \mathbb{N}$.

4. c. Figure à compléter :

- A_6 a pour affixe z_6 d'argument $\frac{6\pi}{6} = \pi$; ce point est donc sur l'axe des abscisses. Comme OA_5A_6 est rectangle en A_6 , on trace le cercle de diamètre $[OA_5]$; le point A_6 est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses.
- A_7 a pour affixe z_7 d'argument $\frac{7\pi}{6}$; donc les points A_1, O et A_7 sont alignés. Le point A_7 se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre $[OA_6]$ et (OA_1) .



On vérifie bien que les points A_3 et A_9 appartiennent à l'axe des ordonnées.



Exercice 4. Étude de fonctions

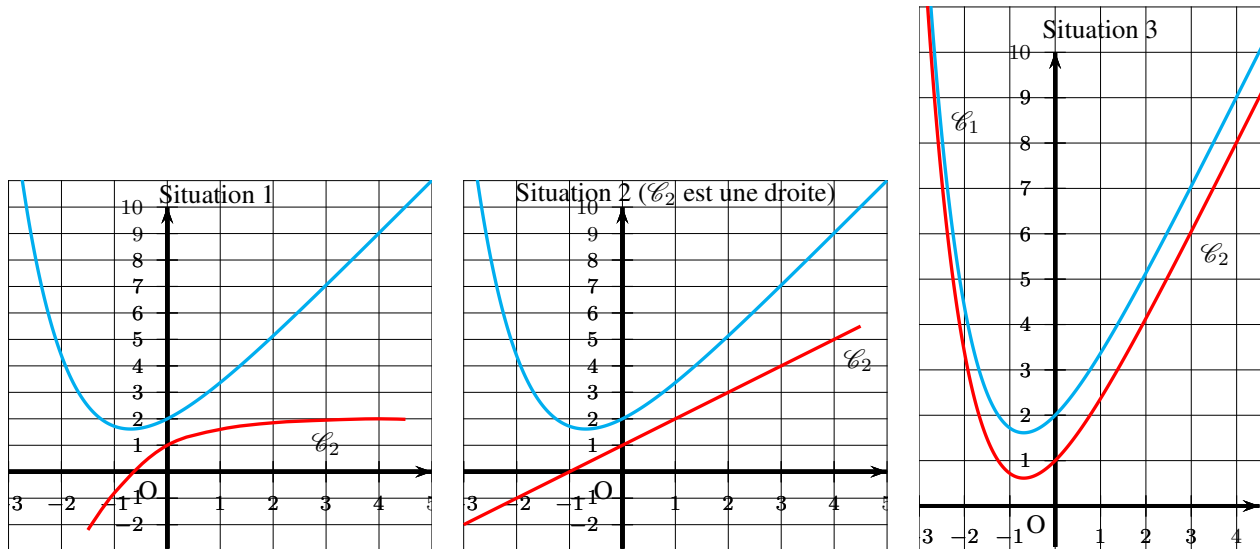
7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$ et le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction f . Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathcal{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.



Il suffit d'étudier le signe de $f'(x)$ dans chacun des cas.

- **La situation 3 est impossible** car la fonction f , de courbe représentative $\mathcal{C}_1$, est visiblement décroissante puis croissante sur cet intervalle donc de dérivée négative puis positive. Or la courbe $\mathcal{C}_2$, supposée être celle de f' , est celle d'une fonction strictement positive.
 - **La situation 2 est impossible** car la courbe $\mathcal{C}_2$, supposée être celle de f' , coupe l'axe des abscisse en $x = -1$ et donc $f'(-1) = 0$. Cela implique que la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ présente une tangente horizontale en $x = -1$ ce qui n'est pas le cas.
 - C'est donc la **situation 1 qui est correcte**.
2. L'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A (0 ; 2) est donnée par :

$$\Delta : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

- Or le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$ de f donc $f(0) = 2$;
- le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$ de f' donc $f'(0) = 1$;

donc

$$\Delta : y = x + 2$$

3. On sait que pour tout réel x , $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

3. a. Déterminons la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

- Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$ de f donc $f(0) = 2$;

$$f(0) = 2 \iff e^0 + b = 2 \iff \boxed{b = 1}$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} + ax + 1}$$

3. b. Prouvons que $a = 2$.

- D'après la question 3a), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} + ax + 1$$

- Or le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$ de f' donc $f'(0) = 1$;
Pour tout réel x , la fonction f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x} + a$$

donc

$$f'(0) = 1 \iff -e^0 + a = 1 \iff \boxed{a = 2}$$

- Pour conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} + 2x + 1}$$

4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , la fonction f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x} + 2$$

- De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 0 \iff -e^{-x} + 2 = 0 \iff e^{-x} = 2$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}; \boxed{f'(x) = 0 \iff x = -\ln 2}$$

- Et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0 &\iff -e^{-x} + 2 > 0 \\ &\iff 2 > e^{-x} \end{aligned}$$

La fonction $\ln$ étant croissante sur $]0; +\infty[$, on a par composition :

$$f'(x) > 0 \iff \ln 2 > -x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \boxed{f'(x) > 0 \iff x > -\ln 2}$$

- En conséquence :

$$\left. \begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff x > -\ln 2 \\ f'(x) = 0 &\iff x = -\ln 2 \end{aligned} \right\} \implies f'(x) < 0 \iff x < -\ln 2$$

La fonction f est donc croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty; -\ln 2]$.

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} &= 0 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\text{par addition}} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 2x + 1 = +\infty \text{ soit } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$+\infty \searrow \quad \quad \nearrow +\infty$ $\quad \quad \quad f(-\ln 2)$		

avec $f(-\ln 2) = 3 - 2 \ln 2 \approx 1,6$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

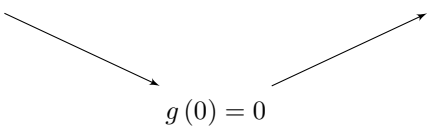
1. 1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) &= f(x) - (x + 2) \\ &= e^{-x} + 2x + 1 - (x + 2) \\ g(x) &= e^{-x} + x - 1\end{aligned}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} + 1$.

On obtient facilement :

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) > 0 \iff x > 0 \\ g'(x) = 0 \iff x = 0 \end{array} \right\} \implies g'(x) < 0 \iff x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
Variations de g			

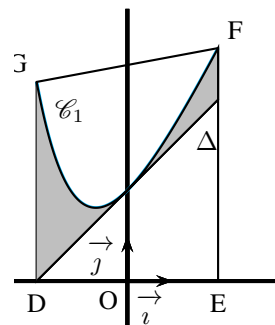
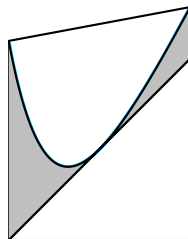
et donc le minimum de g est atteint en 0 et vaut, $g(0) = 0$.

1. b. En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_1$ par rapport à la droite Δ .

On a montré à la question 2 de la partie A que $\Delta : y = x + 2$ donc la position relative de la courbe $\mathcal{C}_1$ par rapport à la droite Δ est donnée par le signe de $g(x) = f(x) - (x + 2) = e^{-x} + x - 1$.

Or $g(x)$ est toujours positif d'après la question précédente et nul en 0.

De ce fait, la courbe $\mathcal{C}_1$ est toujours au-dessus de la droite Δ et les courbes ont un seul point d'intersection, le point $A(0; 2)$.



2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

Puisque d'après la question précédente, la courbe $\mathcal{C}_1$ est toujours au-dessus de la droite Δ , l'expression $g(x) = f(x) - (x + 2)$ est toujours positive

De ce fait, l'aire de la partie du logo colorée en gris, en unités d'aire, est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-2}^2 g(x) dx = \int_{-2}^2 (e^{-x} + x - 1) dx = \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x \right]_{-2}^2 \\ &= \left(-e^{-2} + \frac{2^2}{2} - 2 \right) - \left(-e^2 + \frac{2^2}{2} + 2 \right)\end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^2 g(x) dx = e^2 - e^{-2} - 4 \approx 3,25 \text{ u.a.}$$