Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S
Amérique du Nord

Série S   Vendredi 30 Mai 2014
Correction

Exercice 1.   Probabilités   5 points

Commun à tous les candidats.

Partie A : Conditionnement des pots

1. Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

La variable aléatoire X qui exprime la quantité de crème (en ml) dans chaque pot suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$. Un pot est non conforme si il contient moins de 49 ml donc la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme est $P(X < 49)$. La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{P(X < 49) \approx 0{,}202}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(0, 49, 50, 1, 2) \approx 0{,}202\,328\,324\,6$$

2.

2. a. Préciser la loi que suit la variable Z.

On a posé :

$$Z = \frac{X - 50}{\sigma'}$$

où X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ'.
On a donc centré et réduit la variable X qui suit une loi normale. La variable aléatoire Z ainsi obtenue suit donc une **loi normale centrée, réduite $N(0, 1)$**.

2. b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $P(Z \leq u) = 0,06$.

On cherche u tel que $P(Z \leq u) = 0,06$ où Z suit une loi normale centrée réduite. La calculatrice nous donne alors arrondi au millième :

$$\boxed{u \approx -1,555}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.06) \approx -1{,}554\,773\,593$$

2. c. En déduire la valeur attendue de σ'.

On sait que $P(Z \leq u) = 0,06$ avec $u \approx -1,555$.
On veut réduire à $0,06$ la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme donc :

$$P(X \leq 49) = 0,06 \iff P\left(\frac{X - 50}{\sigma'} \leq \frac{49 - 50}{\sigma'}\right) = 0,06$$

et puisque $Z = \dfrac{X - 50}{\sigma'}$

$$P(X \leq 49) = 0,06 \iff P\left(Z \leq -\frac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$$

or d'après la question précédente $P(Z \leq u) = 0,06 \iff u \approx -1,555$ donc

$$P(X \leq 49) = 0,06 \iff -\frac{1}{\sigma'} = u$$

soit

$$\boxed{\sigma' = -\frac{1}{u} \approx 0,643}$$

3.

3. a. On admet que Y suit une loi binomiale, en donner les paramètres.
Vérifions les hypothèses de validation d'un loi binomiale :

- Un pot a 2 états : il est conforme ou pas. La probabilité d'être non conforme est :

$$p = P(X \leq 49) = 0,06$$

On est donc en présence d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,06$.

- Les pots sont choisies au hasard, les tirages sont aléatoires, indépendants et identiques.

De ce fait, la variable aléatoire Y qui est égale au nombre de pots non conformes, désigne bien le nombre de succès d'une répétition de $n = 50$ épreuves de **Bernoulli** indépendantes de paramètre p.
Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,06$.

3. b. Calculer la probabilité de recevoir deux pots non conformes ou moins.
On cherche la probabilité de l'évènement $(Y \leq 2)$.
Or puisque Y suit une loi Binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,06$ on a :

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et de ce fait

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$$
$$P(Y \leq 2) = \binom{50}{0}(0,94)^{50} + \binom{50}{1}0,06^1(0,94)^{49} + \binom{50}{2}0,06^2(0,94)^{48}$$

soit

$$\boxed{P(Y \leq 2) \approx 0{,}416}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.binomFdR}(50, 0.06, 2) \approx 0{,}416\,246\,475\,6$$

Partie B : Campagne publicitaire

Sur 140 personnes interrogées lors du sondage, 99 se déclarent satisfaites.
Estimer par un intervalle de confiance au seuil 95% la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.
Dans un échantillon de 140 personnes, 99 sont satisfaites. La fréquence observée est donc $f = \dfrac{99}{140}$.
On a $n = 140$, $f = \dfrac{99}{140} \approx 0{,}707$ alors :

$$\begin{cases} \checkmark \quad n = 140 \geq 30 \\ \checkmark \quad nf = 99 \geq 5 \\ \checkmark \quad n(1-f) = 41 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \;;\; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{99}{140} - \frac{1}{\sqrt{140}} \;;\; \frac{99}{140} + \frac{1}{\sqrt{140}}\right]$$

soit puisque les borne sont :

- $\dfrac{99}{140} - \dfrac{1}{\sqrt{140}} \approx 0{,}622\,627$. On arrondit la borne inférieure par défaut au millième soit $\mathbf{0,622}$.
- $\dfrac{99}{140} + \dfrac{1}{\sqrt{140}} \approx 0{,}791\,658$. On arrondit la borne supérieure par excès au millième soit $\mathbf{0,792}$.

$$\boxed{I \approx [0{,}622\;;\;0{,}792]}$$

Il y aura donc, entre $62,2\%$ et $79,2\%$ de personnes satisfaites.

Exercice 2. Étude de fonction — 6 points

Commun à tous les candidats
On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 5\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x} + x - 3 \end{cases}$$

Partie A : Position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

1. **Justifier que pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$, $g(x) > 0$.**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \ ; \ g(x) &= f(x) - (x-3) \\ g(x) &= 5\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x} + x - 3 - x + 3 \\ g(x) &= 5\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x} \\ g(x) &= \mathrm{e}^{-x}\left(5 - 3\,\mathrm{e}^{-x}\right) \end{aligned}$$

et puisque pour tout réel x, e^{-x} est strictement positif, $g(x)$ est du signe de $\left(5 - 3\,\mathrm{e}^{-x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \ ; \ g(x) > 0 &\iff 5 - 3\,\mathrm{e}^{-x} > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} < \frac{5}{3} \end{aligned}$$

en composant par la fonction $x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \ ; \ g(x) > 0 &\iff -x < \ln\frac{5}{3} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ ; \ g(x) > 0 &\iff x > -\ln\frac{5}{3} \approx -0,51 \end{aligned}$$

La condition est toujours vérifiée sur $\mathbb{R}_+$ et donc **pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$, $g(x) > 0$.**

Remarque : On pouvait aussi utiliser le fait que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ ; \ 0 < \mathrm{e}^{-x} \leq 1$ pour étudier le signe de $g(x)$.

2. **La courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.**
Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = x - 3$ et donc de l'équation $g(x) = 0$. Or on a vu à la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ ; \ g(x) > 0$$

De ce fait, **la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.**

Partie B : Étude de la fonction g

1. **Justifier que pour tout réel x positif, la distance MN est égale à $g(x)$.**
Attention : On doit se placer dans un **repère orthonormé** pour que le calcul de distances avec la formule usuelle soit légitime. Ici, nous disposons d'un **repère orthogonal**. Les unités sont différentes sur l'axe des abscisses et sur celui des ordonnées. Cependant, la distance MN cherchée est liée à deux points de même abscisse donc situés sur une droite verticale, parallèle à l'axe des ordonnées. On peut alors calculer la distance MN dans le repère orthogonal proposé en prenant la valeur absolue de la différence des ordonnées des deux points. Cette distance sera exprimée en unités de longueur sur (Oy).
Pour $M\,(x\ ;\ f(x))$ et $N\,(x\ ;\ x-3)$ avec x positif :

$$\begin{aligned} MN &= |x - 3 - f(x)| \\ MN &= |(g(x))| \end{aligned}$$

or on a montré que $g(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$MN = g(x)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \ ; \ MN = g(x)}$$

2. Calculer $g'(x)$ pour x positif.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; g(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(5 - 3\,\mathrm{e}^{-x}\right)$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composées de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; g'(x) = \left(5\,\mathrm{e}^{-x}\right)' + \left(-3\,\mathrm{e}^{-2x}\right)'$$

on sait que si u est dérivable, $(\mathrm{e}^{u})' = u'\,\mathrm{e}^{u}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; g'(x) = -5\,\mathrm{e}^{-x} + 6\,\mathrm{e}^{-2x}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; g'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-5 + 6\,\mathrm{e}^{-x}\right)}$$

3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$ que l'on déterminera.

Puisque pour tout réel x, e^{-x} est strictement positif, $g'(x)$ est du signe de $\left(-5 + 6\,\mathrm{e}^{-x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; g'(x) > 0 &\iff -5 + 6\,\mathrm{e}^{-x} > 0\\ &\iff \mathrm{e}^{-x} > \frac{5}{6}\end{aligned}$$

en composant par la fonction $x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; g'(x) > 0 \iff x < -\ln\frac{5}{6} = \ln\frac{6}{5}$$

de plus on en déduit facilement de la même façon

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; g'(x) = 0 \iff x = \ln\frac{6}{5}$$

En conséquence pour x positif on a :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g'(x) > 0 \iff 0 \leq x < \ln\dfrac{6}{5} \\ g'(x) = 0 \iff x = \ln\dfrac{6}{5} \end{array}\right\} \implies \; g'(x) < 0 \iff x > \ln\frac{6}{5}}$$

La fonction g **est donc croissante sur** $\left[\mathbf{0}\;;\;\ln\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right]$ **et décroissante sur** $\left[\ln\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\;;\;+\infty\right[$.

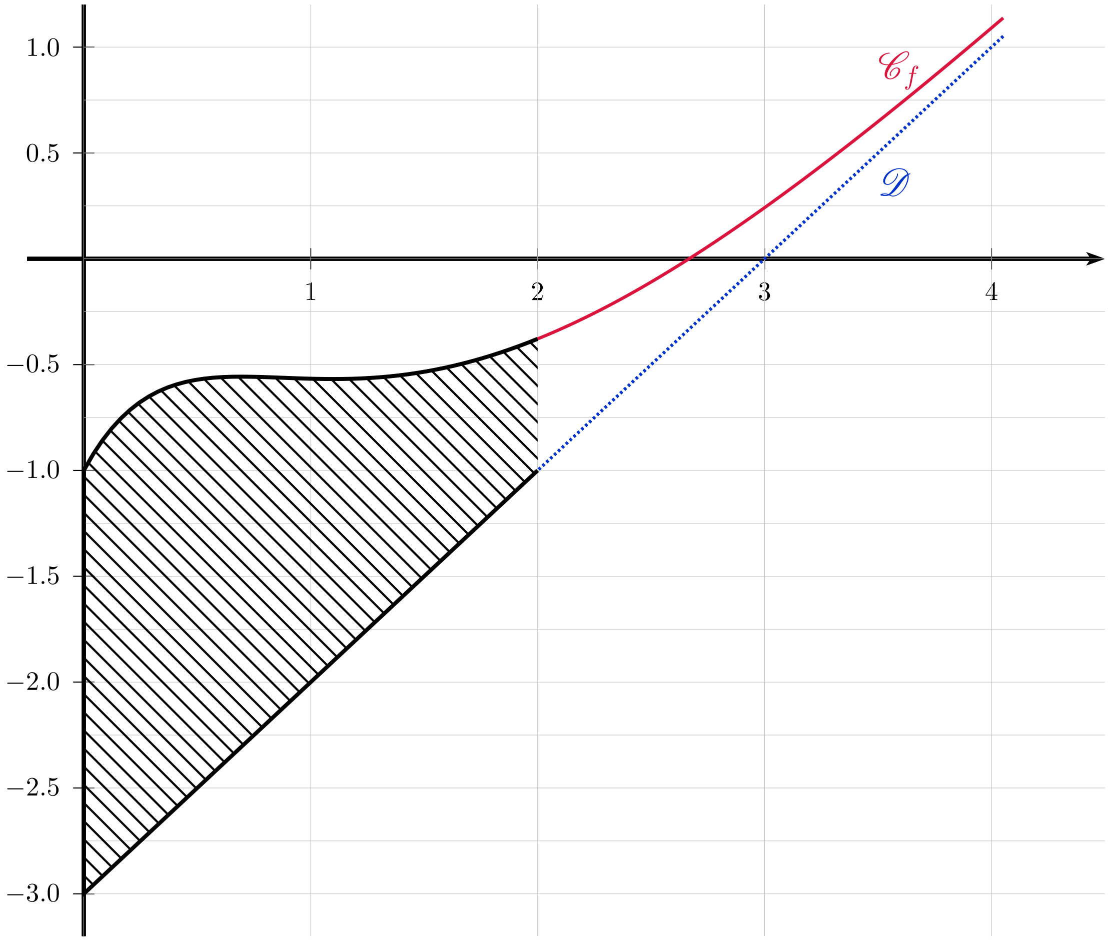
Elle admet donc un maximum m en $\ln\dfrac{6}{5}$. Ce maximum est :

$$\begin{aligned} m &= g\left(\ln\frac{6}{5}\right) = \mathrm{e}^{-\ln\frac{6}{5}}\left(5 - 3\,\mathrm{e}^{-\ln\frac{6}{5}}\right)\\ m &= \mathrm{e}^{\ln\frac{5}{6}}\left(5 - 3\,\mathrm{e}^{\ln\frac{5}{6}}\right)\\ m &= \frac{5}{6}\left(5 - 3 \times \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{12}\end{aligned}$$

Le maximum de g est $m = \dfrac{25}{12}$, il est atteint pour $x = \ln\dfrac{6}{5}$. Cela correspond à la distance maximale MN entre les deux courbes, (exprimée en unités de longueur).

Partie C : Étude d'une aire

1. Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine dont l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.



2. Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; \mathscr{A}(x) = \int_0^x f(t) - (t-3)\, \mathrm{d}t$$

La fonction $t \longmapsto f(t) - (t-3) = g(t)$ est **continue** sur $\mathbb{R}_+$, par conséquent la fonction $\mathscr{A}$ **est dérivable** sur ce même intervalle. En outre, d'après l'étude précédente, la fonction $t \longmapsto g(t)$ est **strictement positive** sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \; \mathscr{A}'(x) = f(x) - (x-3) = g(x) > 0$$

La fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in R_+ \; ; \; \mathscr{A}(x) &= \int_0^x f(t) - (t-3)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \left(5\ \mathrm{e}^{-t} - 3\ \mathrm{e}^{-2t}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[-5\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} \right]_0^x \\
&= -5\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + 5 - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in R_+ \; ; \; \mathscr{A}(x) = -5\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{7}{2}}$$

4. Existe-t-il une valeur x telle que $\mathscr{A}(x) = 2$.

Théorème 1 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

- La fonction $\mathscr{A}$ est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+$;
- L'image par $\mathscr{A}$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est $\left[0\ ;\ \dfrac{7}{2}\right[$ car :
  - $\mathscr{A}(0) = 0$;
  - $\mathscr{A}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$;
  - $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0\end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathscr{A}(x) = \frac{7}{2}$
- Le réel $k = 2$ appartient à l'intervalle image $\left[0\ ;\ \dfrac{7}{2}\right[$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $\Big(\mathscr{A}(x) = k = 2\Big)$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Complément : Calcul de α.
On pouvant aussi répondre à cette question en cherchant la valeur exacte de α. il faut pour cela résoudre l'équation $\mathscr{A}(x) = 2$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+\ ;\ \mathscr{A}(x) = 2 &\iff -5\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{7}{2} = 2\\ &\iff -10\,\mathrm{e}^{-x} + 3\,\mathrm{e}^{-2x} + 3 = 0\end{aligned}$$

On pose alors $X = \mathrm{e}^{-x}$ et l'on obtient :

$$\begin{aligned}&\iff -10X + 3X^2 + 3 = 0\\ &\iff X = \frac{1}{3} \text{ ou } X = 3\\ &\iff \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{3} \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 3\\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ ;\ \mathscr{A}(x) = 2 &\iff x = \ln 3 \text{ ou } x = -\ln 3\end{aligned}$$

or x doit être positif donc on exclut la solution négative

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\ ;\ \mathscr{A}(x) = 2 \iff x = \ln 3$$

$$\boxed{\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}_+\ ;\ \mathscr{A}(x) = 2 \iff x = \ln 3 = \alpha}$$

Exercice 3. Géométrie dans l'espace — 4 points

Commun à tous les candidats.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

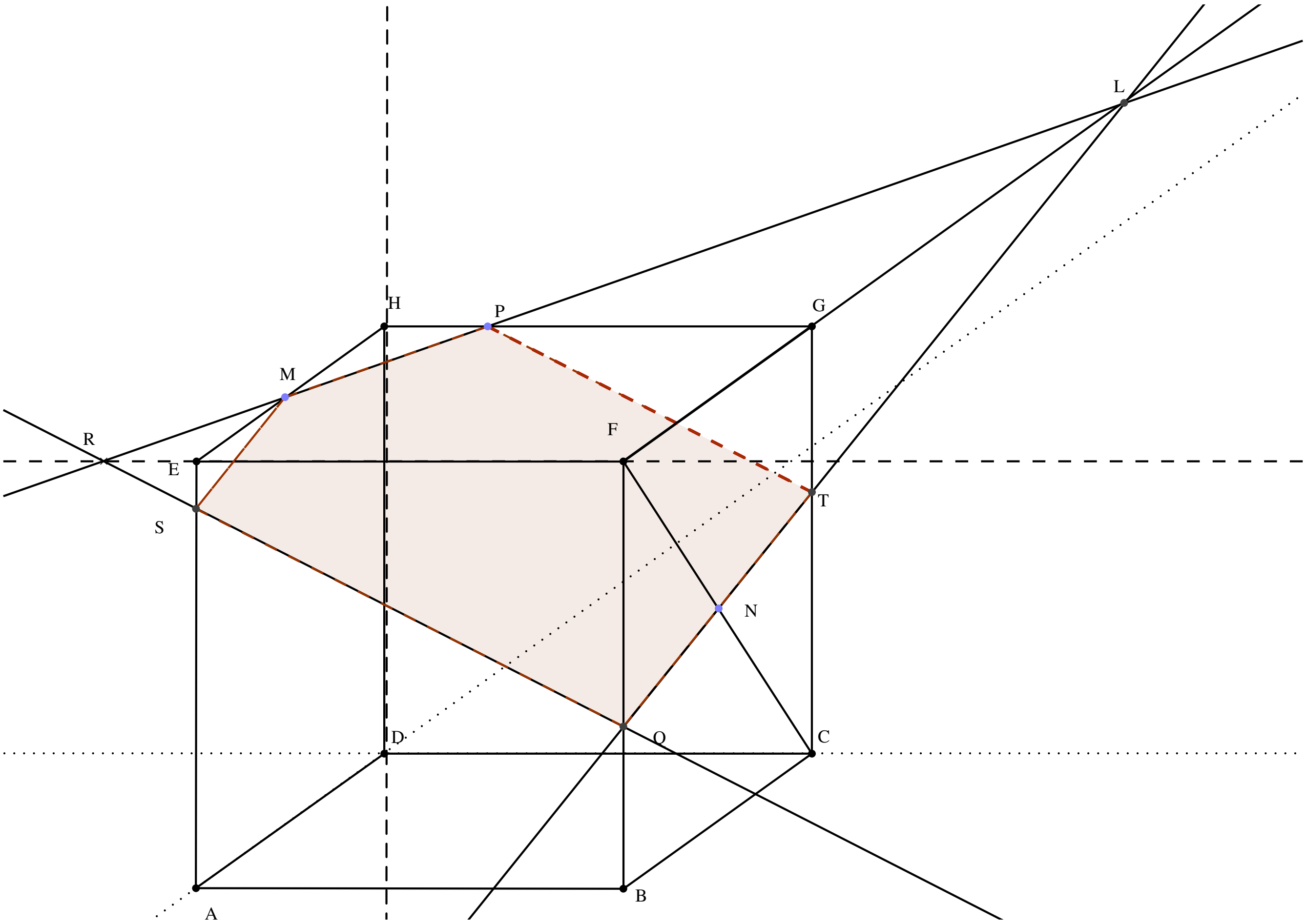
1. Justifier que les droite (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.

Les 2 droites sont MP) et (FG) coplanaires car elles appartiennent à la face EFGH. Les droites (EH) et (FG) sont parallèles puisque EHGF est un carré donc la seule façon pour que (MP) et (FG) soient parallèles est que le point P appartienne à (EH). Or le point P n'appartient pas à [EH] car $\overrightarrow{HP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HG}$ donc les droites (MP) et (FG) sont donc sécantes.

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes en T et que les droites (LN) et (BF) sont sécantes en Q.

2. a. Construire les points T et Q.

- Les droites (LN) et (CG) sont sécantes (donc coplanaires) en T ;
- les droites (LN) et (BF) sont sécantes (donc coplanaires) en Q.



2. b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

- **Montrons que $Q \in (MNP) \cap (ABF)$**
  - La droite (LN) appartient au plan (MNP) donc le point Q, qui appartient à (LN), appartient aussi au plan (MNP)

$$Q \in (LN) \subset (MNP)$$

  - La droite (BF) appartient au plan (ABF) donc le point Q, qui appartient à (BF), appartient aussi au plan (ABF)

$$Q \in (BF) \subset (ABF)$$

  - On a donc montré que le point Q appartient au deux plans (MNP) et (ABF).

$$\boxed{Q \in (MNP) \cap (ABF)}$$

- **Montrons que $R \in (MNP) \cap (ABF)$**
  - On se place dans le plan (EFG), la face supérieure du cube. Les droites (EF) et (PM) appartiennent au plan (EFG) et sont sécantes en R.
  - La droite (MP) appartient au plan (MNP) donc le point R, qui appartient à (MP), appartient aussi au plan (MNP)
  $$R \in (MP) \subset (MNP)$$
  - La droite (EF) appartient au plan (ABF) donc le point R, qui appartient à (EF), appartient aussi au plan (ABF)
  $$R \in (EF) \subset (ABF)$$
  - On a donc montré que le point R appartient au deux plans (MNP) et (ABF).
  $$\boxed{R \in (MNP) \cap (ABF)}$$
- **L'intersection des des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite (RQ)**.

3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).
La section du cube par le plan (MNP) est représentée par le polygone MSQTP.

Partie B

Le plan est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$

1. Donner les coordonnées des points M, N et P.

$$\boxed{M\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)}\,;\,\boxed{N\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)}\,;\,\boxed{P\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,1\right)}$$

2. Déterminer les coordonnées de L.

- $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0,25\\0,5\\0\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de (MP) est donc : $\begin{cases} x = & 0,25k \\ y = & 0,5+0,5k \\ z = & 1\end{cases} \quad ; k \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de (FG) est donc : $\begin{cases} x = & 1 \\ y = & k' \\ z = & 1\end{cases} \quad ; k' \in \mathbb{R}$

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites vérifient donc les deux systèmes. L'égalité des abscisses implique que $k = 4$ et donc que $y = 0,5+0,5\times 4 = 2,5$ Les coordonnées de L sont donc

$$\boxed{L\left(1\,;\,\frac{5}{2}\,;\,1\right)}$$

3. Le triangle TPN est-il rectangle en T ?
On admet que : $T\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.
Le repère est orthonormé donc le calcul de distances est légitime. On obtient facilement :

- $TP^2 = \dfrac{45}{64}$;
- $TN^2 = \dfrac{17}{64}$;
- $NP^2 = \dfrac{17}{16}$;

Si le triangle TPN est rectangle, c'est donc en T car [NP] est le plus grand côté. On a

$$NP^2 \neq TP^2 + TN^2$$

donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

Exercice 4. Obligatoire - Suites — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau ?

Un volume constant de 2 200 m^3 est réparti entre deux bassins A et B. De ce fait on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_n + b_n = 2\,200}$$

2. Justifier que pour tout entier n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.

Tous les jours ;

- 15% de l'eau du bassin B est transféré au bassin A, soit $0,15 \times b_n$;
- 10% de l'eau du bassin A est transféré au bassin B, il reste donc dans le bassin A : $0,90 \times a_n$;

de ce fait on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_{n+1} = 0,15 \times b_n + 0,90 \times a_n$$

or d'après la question précédente $a_n + b_n = 2\,200$

$$a_{n+1} = 0,15 \times (2\,200 - a_n) + 0,90 \times a_n$$
$$a_{n+1} = 330 + 0,75\,a_n$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_{n+1} = \frac{3}{4}\,a_n + 330}$$

3. Algorithme.

Variables :	n est un entier naturel et a est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à a la valeur 800
Traitement :	Tantque $a < 1\,100$ Faire
		Affecter à a la $\boxed{0,75 \times a + 330}$.
		Affecter à n la valeur $n + 1$
	FinTantque.
		Affecter à n la valeur $\boxed{n}$: inutile
Sortie :	Afficher n

Par exemple avec Algobox on obtient : 3 en sortie. En fait $a_3 = 1\,100{,}625$ et $a_2 = 1\,027{,}5$.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
a EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  a PREND_LA_VALEUR 800
  TANT_QUE (a<1100) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    a PREND_LA_VALEUR 0.75*a+330
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  n PREND_LA_VALEUR n
  AFFICHER n
  AFFICHER a
FIN_ALGORITHME
```

4. Pour tout entier n on pose $u_n = a_n - 1\,320$.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,320 \\ &= 0,75a_n + 330 - 1\,320 \\ &= 0,75a_n - 990 \\ &= 0,75\left(a_n - \frac{990}{0,75}\right) \\ &= 0,75\,(a_n - 1\,320) \\ u_{n+1} &= 0,75u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,75$,**
et de premier terme $u_0 = a_0 - 1\,320 = 800 - 1\,320 = -520$.

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 & = -520 \\ u_{n+1} & = \dfrac{3}{4}\,u_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

4. b. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire l'expression de a_n.

- Puisque (u_n) est une suite géométrique, on peut donc écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_n = -520\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

- De l'égalité $u_n = a_n - 1\,320$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $a_n = u_n + 1\,320$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; a_n = 1\,320 - 520\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

5. On cherche à savoir si les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau. Proposer une méthode.

On cherche donc à résoudre l'équation $(E)\ :\ a_n = b_n = \dfrac{2\,200}{2}$.

$$\begin{aligned} (E)\ :\ a_n = b_n = \frac{2\,200}{2} &\iff 1\,320 - 520\left(\frac{3}{4}\right)^n = 1\,100 \\ &\iff \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{220}{520} = \frac{11}{26} \end{aligned}$$

On compose par la fonction $x \longmapsto \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} &\iff n\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\frac{11}{26} \\ &\iff n = \frac{\ln\dfrac{11}{26}}{\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)} \approx 2{,}990\,1 \end{aligned}$$

Au bout de 3 jours, le bassin A a un volume de $a_3 \approx 1\,100{,}625$ et le bassin B un volume de $b_3 \approx 1\,099{,}375$.
Ils ont alors, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Exercice 4 : Spécialité - Suites — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

1. **Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau ?**
Un volume constant de 2 200 m^3 est réparti entre deux bassins A et B. De ce fait on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; a_n + b_n = 2\,200}$$

2. **Donner les formules à écrire et recopier dans les cellules B3 et C3**.
   - On a en B3 : $\boxed{B2 \times 0,9 + C2 \times 0,15 - 5}$
   - et en C3 : $\boxed{2\,200 - B3}$

3. **Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins** ?
Il semblerait que le volume du bassin A augmente chaque jour sans dépasser 1 300 m^3 et que le volume du bassin B diminue chaque jour sans passer sous les 900 m^3.

Partie B

1. **Vérifier que $S = MS + R$. En déduire que pour tout entier n, $X_{n+1} - S = M\left(X_n - S\right)$.**

On a :

$$MS + R = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$MS + R = \begin{pmatrix} 0,9 \times 1\,300 + 0,15 \times 900 - 5 \\ 0,1 \times 1\,300 + 0,85 \times 900 + 5 \end{pmatrix}$$
$$MS + R = \begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix} = S$$

soit

$$\boxed{S = MS + R}$$

Pour tout entier n :

$$X_{n+1} - S = MX_n + R - S$$

or on a montré que $S = MS + R$ donc

$$X_{n+1} - S = MX_n + R - (MS + R)$$
$$X_{n+1} - S = M\left(X_n - S\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; X_{n+1} - S = M\left(X_n - S\right)}$$

2. **Montrer que pour tout entier n, $X_n = \begin{pmatrix} 1\,300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$.**
   - On admet que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; X_n - S = M^n\left(X_0 - S\right) \quad \text{et} \quad M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix}$$
   - Or on a :
   $$X_0 - S = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,100 - 1\,300 \\ 1\,100 - 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \end{pmatrix}$$
   - Pour tout entier n :
   $$X_n = M^n\left(X_0 - S\right) + S$$
   $$X_n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix}$$
   $$X_n = \begin{pmatrix} -200\left(0,6 + 0,4 \times 0,75^n\right) + 200\left(0,6 - 0,6 \times 0,75^n\right) \\ -200\left(0,4 - 0,4 \times 0,75^n\right) + 200\left(0,4 + 0,6 \times 0,75^n\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix}$$
   $$X_n = \begin{pmatrix} -200 \times 0,75^n \\ 200 \times 0,75^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix}$$

Donc on vient de déterminer l'expression des suites (a_n) et (b_n) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; X_n = \begin{pmatrix} a_n = 1\,300 - 200 \times 0,75^n \\ b_n = 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}}$$

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

- **Conjecture 1 : les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante.**

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\,;\; a_{n+1} - a_n &= 1\,300 - 200 \times 0,75^{n+1} - (1\,300 - 200 \times 0,75^n) \\ &= -200 \times 0,75^{n+1} + 200 \times 0,75^n \\ &= 200 \times 0,75^n \times (-0,75 + 1) \\ \forall n \in \mathbb{N}\,;\; a_{n+1} - a_n &= 50 \times 0,75^n \geq 0\end{aligned}$$

De ce fait, la suite (a_n) est croissante.
De l'égalité $a_n + b_n = 2\,200$ on en déduite que $b_n = 2\,200 - a_n$ et donc que (b_n) est décroissante.

- **Conjecture 2 : les limites des suites (a_n) et (b_n) sont respectivement 1 300 et 900** .

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,75 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} 200 \times (0,75)^n = 0$$

Ce qui montre que la suite (a_n) tend vers 1 300.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 1\,300}$$

De l'égalité $b_n = 2\,200 - a_n$ on en déduit alors que la limite de la suite (b_n) est bien 900. .

4. Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.
On cherche à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $1\,300 - a_n < 1,5$ qui, du fait de l'égalité $b_n = 2\,200 - a_n$, est équivalente à l'inégalité $b_n - 900 < 1,5$. Or on a pour n entier :

$$\begin{aligned}1\,300 - a_n < 1,5 &\iff 1\,300 - (1\,300 - 200 \times 0,75^n) < 1,5 \\ 1\,300 - a_n < 1,5 &\iff 200 \times 0,75^n < 1,5 \\ &\iff 0,75^n < \frac{3}{400}\end{aligned}$$

On compose par la fonction $x \longmapsto \ln x$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$1\,300 - a_n < 1,5 \iff n \ln 0,75 < \ln \frac{1,5}{200}$$

or $\ln 0,75 < 0$ d'où

$$1\,300 - a_n < 1,5 \iff n > \frac{\ln \frac{1,5}{200}}{\ln 0,75} \approx 17,008$$

Le premier jour pour lequel le processus est stabilisé est donc le 18$^{\text{ème}}$ jour.

- Fin du Devoir -