Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S
Liban

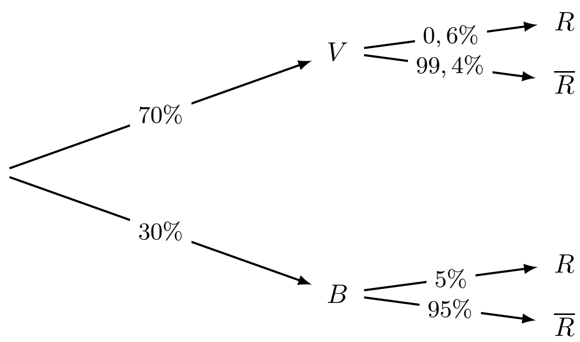
Série S Spécialité
Mardi 27 Mai 2014
Correction

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
On peut schématiser le problème à l'aide d'un arbre pondéré :



2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
D'après les données on sait que $P_V(R) = 0,6\%$ et que $P(V) = 70\%$ et donc :

$$\boxed{P(V \cap R) = P_V(R) \times P(V) = 0,7 \times 0,006 = 0,42\%}$$

3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192.
En appliquant la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(V \cap R) + P(B \cap R) \\ &= 0,42\% + P_B(R) \times P(B) \\ &= 0,42\% + 30\% \times 5\% \\ P(R) &= 0,42\% + 1,5\% \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{P(R) = 0,0192 = 1,92\%}$$

4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?
La probabilité cherchée, traduite avec les notations, est $P_R(B)$, or on a :

$$\begin{aligned} P_R(B) &= \frac{P(B \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{P_B(R) \times P(B)}{P(R)} \\ P_R(B) &= \frac{30\% \times 5\%}{1,92\%} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{P_R(B) = 0,78125 \approx 78,12\%}$$

Partie B : Le vélo

1. **Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée**.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprime en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.
La probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée se traduit donc par $P(15 \leq T \leq 20)$.
La calculatrice nous donne alors arrondi au dix millième :

$$\boxed{P(15 \leq T \leq 20) \approx 0,9460}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(15, 20, 17, 1.2) \approx 0{,}945\,999\,989\,787$$

2. **Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?**
L'élève est en retard au lycée si il arrive après 8 h 00 et donc, puisqu'il part de son domicile à vélo à 7 h 40, si son trajet en vélo dure plus de 20 minutes.
La probabilité cherchée se traduit donc par $P(T > 20) =$.
La calculatrice nous donne alors arrondi au dix millième :

$$\boxed{P(T > 20) \approx 0,0062}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(20, \infty, 17, 1.2) \approx 0{,}006\,209\,679\,853$$

3. **L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près**.
On cherche donc T_0 tel que la probabilité de l'évènement $(T \leq T_0)$ soit de $0,9$.
La calculatrice nous donne alors arrondi au millième :

$$\boxed{T_0 \approx 18,538}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.9, 17, 1.2) \approx 18{,}537\,861\,879\,9$$

Donc, l'élève a une probabilité de 0,9 de mettre entre 0 et 18,538 min de temps de trajet. Soit environ 18 min 30 secondes. Il doit donc quitter son domicile vers

8 h 00 - 18 min 30 sec = 7 h 41 min 30 sec

On doit donner une réponse à la minute près, on pourra donc répondre 7 h 41 min ou 7 h 42 min. Cependant si on veut qu'il ait une probabilité d'au moins 0,9 d'arriver à l'heure, on privilégiera 7 h 41 min.
L'élève doit donc partir avant 7 h 41 min.

Partie C : le bus

1. **Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?**
On a posé :

$$Z' = \frac{T' - 15}{\sigma'}$$

où T' suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On a donc centré et réduit la variable T' qui suit une loi normale. La variable aléatoire Z' ainsi obtenue suit donc une **loi normale centrée, réduite $N(0, 1)$**.

2. Déterminer une valeur approchée a 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

On sait que $P(T' > 20) = 0,05$. On a alors

$$P\left(\frac{T'-15}{\sigma'} > \frac{20-15}{\sigma'}\right) = 0,05$$

et puisque $Z' = \dfrac{T'-15}{\sigma'}$

$$P\left(Z' > \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,05$$

On cherche donc, à la calculatrice, la borne inférieure d'un intervalle « à droite » de probabilité 0,05. C'est à dire le réel x_0 tel que $P(Z' > x_0) = 0,05$ ou $P(Z' \leq x_0) = 0,95$.
La calculatrice nous donne alors arrondi au millième :

$$\boxed{x_0 \approx 1,6449}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.95) \approx 1{,}644\,853\,625\,91$$

D'où

$$\frac{5}{\sigma'} \approx 1,6449$$

Par suite arrondi au centième :

$$\boxed{\sigma' \approx \frac{5}{1,6449} \approx 3,04}$$

Exercice 2. Vrai ou Faux — 5 points

Proposition 1 (Vraie)

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{ll} x = & 5-2t \\ y = & -1+t \\ z = & -2+t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

En effet pour $t = 2$ on obtient les coordonnées du point A$(1\,;\,1\,;\,0)$ et pour $t = 1$ on obtient les coordonnées du point B$(3\,;\,0\,;\,-1)$.

Proposition 2 (Vraie)

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

- Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{v_{\mathscr{D}}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$;
- Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{v_{(AB)}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$;
- Or le produit scalaire des deux vecteurs directeurs est nul car :

$$\overrightarrow{v_{\mathscr{D}}}\,.\,\overrightarrow{v_{(AB)}} = 2\times(-2)+1\times1+3\times1 = 0$$

donc les deux droites sont bien orthogonales.

Proposition 3 (Faux)

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

- D'après l'étude précédente, on sait que les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles. De ce fait, elles ne peuvent être coplanaires qu'en étant sécantes.
- On cherche donc à résoudre le système :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} 2t' &= 5-2t &: (E_1) \\ 1+t' &= -1+t &: (E_2) \\ -5+3t' &= -2+t &: (E_3) \end{cases}$$

- L'équation (E_2) nous donne $t = t' + 2$;
- En remplaçant t par $t = t' + 2$ dans (E_1) on obtient alors $t' = \dfrac{1}{4}$;
- En remplaçant t par $t = t' + 2$ dans (E_3) on obtient alors $t' = \dfrac{5}{2}$.

Proposition 4 (Faux)

La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées $(8\,;\ -3\,;\ -4)$.

Le point E de coordonnées $(8\,;\ -3\,;\ -4)$ n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 1+t \\ z &= -5+3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

puisque

$$x = 8 \iff t = 4$$

or pour $t = 4$ on a $y = 5$ et $z = 7$.

Proposition 5 (Vraie)

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

- Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n_{\mathscr{P}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc définissent bien le plan (ABC) ;
- Or
$$\overrightarrow{n} \,.\, \overrightarrow{AB} = 0 = \overrightarrow{n} \,.\, \overrightarrow{AC}$$
donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est aussi normal au plan (ABC).
- De ce fait, les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Exercice 3. Étude de fonction 5 points

$$f : \begin{cases} [0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

- **Calcul de la dérivée.**
La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction f est de la forme uv avec :

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; & v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\; f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} - x \times \mathrm{e}^{-x} \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{-x}\left(1 - x\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\; f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - x\right)}$$

- **Étude des variations.**
Or on sait que :

$$\begin{cases} 1 - x & > & 0 & \iff & x < 1 \\ \mathrm{e}^{x} & > & 0 & ; & \forall x \in [0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $(1 - x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,1[$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

- **Tableau de variations de f**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?
On peut rappeler les propriétés des limites de la fonction exponentielle :

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$
- (2) : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0$
- (3) : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1$

Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}}$$

Or d'après la propriété (1) on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

L'**axe des abscisses est donc asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$**.

Remarque : On peut aussi faire un changement de variable $x = -X$ pour utiliser la propriété (2).

Partie B

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
La fonction f est **continue et positive** sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Donc d'après les résultats établis en cours, la fonction $\mathscr{A}$ définie par :

$$\forall t \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et a pour dérivée f.
De ce fait, puisque la fonction f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'après l'étude de la partie A :

$$\boxed{\forall t \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \mathscr{A}'(t) = f(t) \geq 0}$$

La fonction $\mathscr{A}$ est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?
L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire :
$\mathscr{A}$ admet donc 1 pour limite en $+\infty$.

3.

3. a. Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

- **Variations de $\mathscr{A}$.**
D'après les questions précédentes on a :

x	0	$+\infty$
$\mathscr{A}$	0 ↗	1

- **Application du TVI.**

Théorème 1 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : *Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).*
Donc ici :

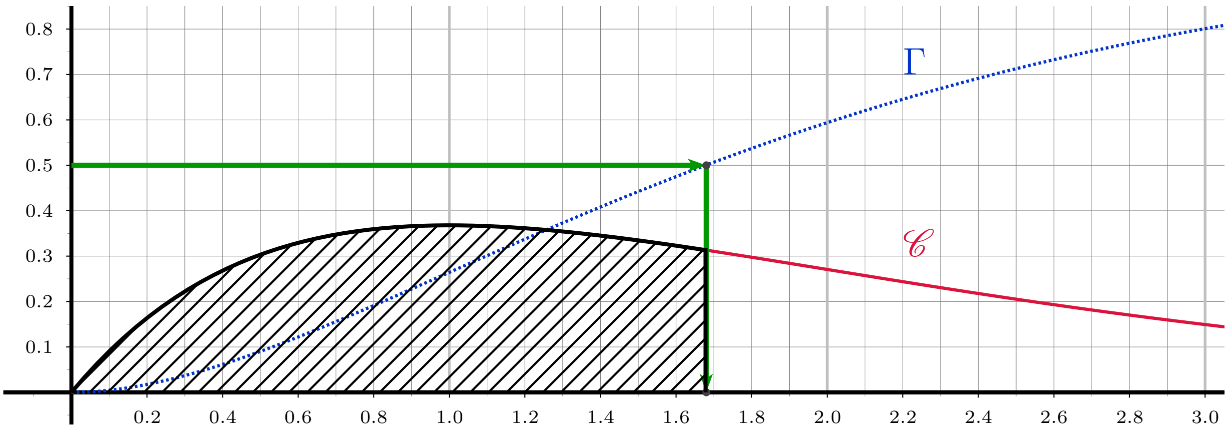
- La fonction $\mathscr{A}$ est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$;
- L'image par $\mathscr{A}$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est $[0\ ;\ 1[$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = \dfrac{1}{2}$ appartient à l'intervalle image $[0\ ;\ 1[$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $\mathscr{A}(x) = k = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. b. Sur le graphique fourni en annexe (à rendre avec la copie) sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe représentant la fonction $\mathscr{A}$. Sur le graphique de l'annexe, identifier les courbes $\mathscr{C}$ et , puis tracer la droite d'équation $y = 0,5$. En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.

Par lecture graphique on a :

$$\boxed{\alpha \approx 1,7}$$



4.

4. a. Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$, calculer $g'(x)$.

La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction g est de la forme uv avec :

$$g(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x+1 & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\quad g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ g'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} - (x+1) \times \mathrm{e}^{-x} \\ g'(x) &= -x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\quad g'(x) = -x\mathrm{e}^{-x} = -f(x)}$$

4. b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $\mathbb{R}_+$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.

$$\forall t \in [0\,;\,+\infty[\ ;\ \mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or on a montré que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[\,,\quad f(x) = -g'(x)$ donc

$$\begin{aligned} \forall t \in [0\,;\,+\infty[\ ;\ \mathscr{A}(t) &= -\int_0^t g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\Big[g(t)\Big]_0^t \\ &= g(0) - g(t) \\ \mathscr{A}(t) &= 1 - (t+1) \times \mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [0\,;\,+\infty[\ ;\ \mathscr{A}(t) = 1 - (t+1) \times \mathrm{e}^{-t}}$$

4. c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.

$$\boxed{\mathscr{A}(6) = 1 - 7\mathrm{e}^{-6} \approx 0,98}$$

Exercice 4. Spécialité - Matrices et suites — 5 points

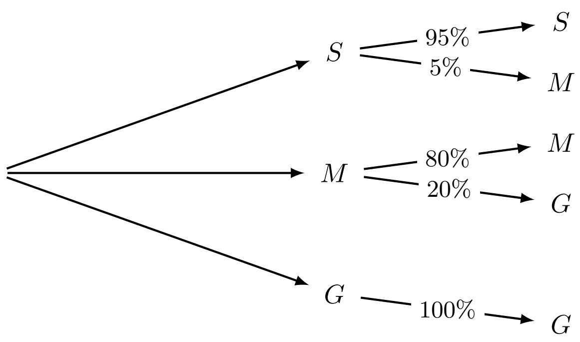
1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$; $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.
On a alors :

$$\boxed{a_1 = 95\% \ ; \ b_1 = 5\% \ ; \ c_1 = 0}$$

2.

2. a. Quelle est la proportion d'individus sain qui restent sains d'un jour au jour suivant ?
En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.
On peut représenter les données à l'aide d'un arbre en notant S un individu sain, M malade et G, guéri.



La proportion d'individus sain qui restent sains d'un jour au jour suivant est de 95% d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ a_{n+1} = 0,95\ a_n}$$

2. b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
D'un jour au jour suivant, 5% des individus sains tombent malade et 80% des malades le restent d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ b_{n+1} = 0,05\ a_n + 0,8\ b_n}$$

3.

3. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

$$A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,95\ a_n \\ 0,05\ a_n + 0,8\ b_n \\ 0,2\ b_n + c_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ A \times U_n = U_{n+1}}$$

3. b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Pour $n = 0$ on a $D^0 = Id$;
- **Hérédité** : Supposons que pour n fixé, $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors

$$D^{n+1} = D \times D^n = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et si on la suppose vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$ donc pour tout entier n on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; D^n = \begin{pmatrix} 0,95^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4.

4. a. Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n)$.

On a admis que pour tout entier n : $U_n = A^n \times U_0$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95^n \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n) \end{pmatrix}$$

et donc par identification

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; b_n = \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n)}$$

4. b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

De ce fait d'après le théorème 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} (0,95)^n = 0 = \lim_{n\to+\infty} (0,8)^n$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (b_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 0}$$

4. c. Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en annexe 2.

Traitement : Tantque $b < b'$ Faire
| $\cdots$.
| Affecter à b' la valeur $\frac{1}{3}(x-y)$.
FinTantque.
Sortie : Afficher k.

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$
Après le 7e passage	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8e passage	8	0,1652	0,6302	0,1342	0,1653	VRAI
Après le 9e passage	9	0,1653	0,5987	0,1073	0,1637	FAUX