



Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S Antilles Guyane

Série S Obli. et Spé.
Jeudi 19 juin 2014
Correction

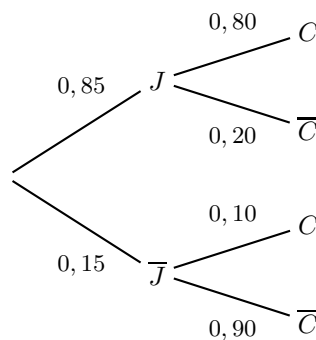
Exercice 1. Probabilités

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. 1. a. L'arbre pondéré est le suivant :



1. b. D'après l'arbre :

$$p(\bar{J} \cap C) = p_{\bar{J}}(C) \times p(\bar{J}) = 0,15 \times 0,10 = 0,015$$

1. c. J et $\bar{J}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} p(C) &= p(C \cap \bar{J}) + p(C \cap J) \\ &= p_{\bar{J}}(C) \times p(\bar{J}) + 0,015 \\ p(C) &= 0,015 + 0,85 \times 0,80 \end{aligned}$$

$$p(C) = 0,695$$

1. d. Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle :

$$p_C(\bar{J}) = \frac{p(\bar{J} \cap C)}{p(C)} = \frac{0,015}{0,695} \approx 0,0216$$

2. La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-4} près :

$$P(87 \leq X \leq 89) \approx 0,2417$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TISat.normFDR}(87, 89, 90, 2) \approx 0,2417303035$$

3. De même la calculatrice nous donne directement arrondi à 10^{-4} près :

$$P(X \geq 91) \approx 0,3085$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TISat.normFDR}(91, \infty, 90, 2) \approx 0,30853753322$$

Remarque : on peut aussi calculer $p(X \geq 91) = 1 - p(0 \leq X \leq 91) \approx 0,3085$.



Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g. Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F .

• 1. Analyse des données :

- « Dans un échantillon de taille $n = 120$, il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g. ». Donc la fréquence observée d'huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.

$$F = \frac{65}{120} = 0,541\overline{7} = 54,17\%$$

- Cet ostréiculteur affirme que $p = 60\%$ de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

• 2. Intervalle de fluctuation : On va regarder si la fréquence observée F appartient à l'intervalle de fluctuation.

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est, si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a $n = 1\,000$, $p = 80\%$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 120 \geq 30 \\ \checkmark & np = 120 \times 60\% = 72 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 120 \times 40\% = 48 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions de validité sont réunies donc l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour la fréquence F_{120} est :

$$I_{120} = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,6 - 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{120}} ; 0,6 + 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{120}} \right]$$

Les bornes de l'intervalle sont :

$$\begin{cases} p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,512\,346 & : \text{on donne la valeur approchée par défaut} \\ p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,687\,654 & : \text{on donne la valeur approchée par excès} \end{cases}$$

soit

$$I_{120} \approx [51,23\% ; 68,77\%]$$

2. Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ?

La fréquence observée d'huîtres pesant plus de 91 g est $F = \frac{65}{120} \approx 0,541\overline{7}$.

On a

$$F \approx 54,17\% \in I_{120} \approx [52,23\% ; 68,77\%]$$

l'hypothèse selon laquelle $p = 0,60$ ne peut être rejetée.



Exercice 2.

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues). En déduire le signe de $g(x)$.

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

- Variations**

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont, et pour tout réel x :

$$g'(x) = -1 + e^x$$

On a alors :

– On a pour tout réel x :

$$g'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0$$

$$g'(x) = 0 \iff e^x = 1$$

En composant par la fonction $\ln$ définie sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) > 0 \iff x > 0$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \boxed{g'(x) = 0 \iff x = 0}$$

– En outre pour tout réel x :

$$g'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0$$

$$g'(x) > 0 \iff e^x > 1$$

La fonction $\ln$ étant croissante sur $]0 ; +\infty[$, on a par composition :

$$g'(x) > 0 \iff x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \boxed{g'(x) > 0 \iff x > 0}$$

Pour conclure

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) > 0 \iff x > 0 \\ g'(x) = 0 \iff x = 0 \end{array} \right\} \implies g'(x) < 0 \iff x < 0$$

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de g			

- Étude de signe**

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x , $g(x) \geq 2 > 0$.

2. Étude en $-\infty$.

La fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{par somme}} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



Étude en $+\infty$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right)^{-1} = 0 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\text{par somme}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Rappel

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

$$\bullet (1) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \left| \quad \bullet (2) : \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \left| \quad \bullet (3) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right. \right.$$

3. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1 e^x - x e^x}{(e^x)^2} \\ &= 1 + \frac{e^x(1-x)}{e^x \times e^x} \\ &= 1 + \frac{1-x}{e^x} \\ &= \frac{e^x + 1 - x}{e^x} \\ f'(x) &= e^{-x} g(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = e^{-x} g(x)}$$

4. On a vu plus haut que, pour tout réel x , $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $e^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Remarque : La première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

- La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$;
- L'image par f de l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$ est $]-\infty ; +\infty[$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image $]-\infty ; +\infty[$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$.



6. 6. a. La tangente T au point d'abscisse $x = 0$ a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T) : y = 2x + 1$$

6. b. Posons, pour tout réel x , $k(x) = f(x) - (2x + 1)$, alors :

$$\begin{aligned} k(x) &= x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x + 1) \\ &= \frac{x}{e^x} - x \\ &= \frac{x}{e^x} (1 - e^x). \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$1 - e^x$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$-$	0	$-$

On en déduit que $\mathcal{C}$ est située en dessous de T .

Partie B

1. Pour tout réel x :

$$H'(x) = -e^{-x} + (-x - 1)(-e^{-x}) = e^{-x}(x + 1 - 1) = x e^{-x} = h(x),$$

la fonction H est donc une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $[1 ; 3]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de T , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_3^4 ((2x + 1) - f(x)) dx \\ &= \int_1^3 x - h(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - H(x) \right]_1^3 \\ \mathcal{A} &= 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}$$



Exercice 3. Vrai/Faux

4 points

Commun à tous les candidats

1. La proposition est **fausse** :

On a :

$$\overrightarrow{AB}(-2 ; 4 ; -1) \text{ et } \overrightarrow{AC}(6 ; -12 ; 3)$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires car

$$\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$$

donc les trois points A , B et C sont alignés et ne définissent pas un plan.

2. La proposition est **vraie**.

On vérifie aisément que les coordonnées de chacun des points A , B et D vérifient l'équation

$$x - 2z + 9 = 0$$

3. La proposition est **fausse**.

la droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\vec{u}(\frac{3}{2} ; -3 ; -\frac{3}{2})$, ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, il ne peut diriger (AC) .

4. La proposition est **fausse**.

Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal, par exemple, $\vec{n}(2 ; -1 ; 5)$, et vecteur $\vec{n}'(-3 ; -1 ; 1)$ est normal au plan $\mathcal{P}'$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles.



Exercice 4. Obligatoire

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. 1. a. A l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

1. b. Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. 2. a. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- **Initialisation.** On a $u_1 = 3,4$ et $\frac{15}{4} \times 0,5 = 1,875$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul, la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$u_k \geq \frac{15}{4} \times 0,5^k \quad (\text{HR})$$

on doit alors démontrer que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1}$.
D'après (HR) :

$$\begin{aligned} u_k &\geq \frac{15}{4} \times 0,5^k && \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\ \frac{1}{5}u_k &\geq \frac{3}{4} \times 0,5^k && \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0,5^k : \\ \frac{1}{5}u_k + 3 \times 0,5^k &\geq \frac{3}{4} \times 0,5^k + 3 \times 0,5^k && \text{c'est-à-dire :} \\ u_{k+1} &\geq \frac{15}{4} \times 0,5^k \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel k , $0,5^k \geq 0,5^{k+1}$, on en déduit donc que :

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1}$$

et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire.

- **Conclusion.** La propriété $\mathcal{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

2. b. Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n \\ &= 3 \times 0,5^n - \frac{4}{5}u_n \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{4}{5} \left(\frac{15}{4} \times 0,5^n - u_n \right) \end{aligned}$$

D'après la question 1.a., cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

2. c. D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

D'après 2.a., pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n > 0$$

La suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.



3. 3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0,5^{n+1} \\ &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5 \times 0,5^n \\ &= \frac{1}{5}u_n - 2 \times 0,5^n \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 10 \times 0,5^n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0,5^0 = 2 - 10 = -8$.

3. b. La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8 \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

On en déduit que

$$-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0,5^n$$

et donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$$

3. c. Limite.

Théorème 3

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

Ici on a $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0,5 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$.

On en déduit par opérations sur les limite que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

4. L'algorithme complet est :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que $u > 0,01$ (1) n prend la valeur $n + 1$ (2) u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0,5^{n-1}$ (3) Fin Tant que
Sortie :	Afficher n



Exercice 4.

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. 1. a. x et y sont des entiers naturels tels que $24x + 45y = 438$, par conséquent :

- $24x \leq 438$ d'où $x \leq \frac{438}{24} = 18,25$, donc $x \leq 18$;
- $45y \leq 438$ d'où $y \leq \frac{438}{45} \approx 9,73$, donc $y \leq 9$.

1. b. Voici l'algorithme complété :

Entrée :	x et y sont des nombres
Traitement :	Pour x variant de 0 à 18 (1) Pour y variant de 0 à 9 (2) Si $24x + 45y = 438$ (3) Afficher x et y Fin Si Fin Pour Fin Pour
Fin traitement	

1. c. Le coût total de réservation étant de 438 €, et 438 étant égal à 146×3 , ce montant est multiple de 3 !

1. d. 1. d. 1. Les entiers 8 et 15 étant premiers entre eux, le théorème de Bézout entraîne l'existence d'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs tels que $8x + 15y = 1$.

1. d. 2. On a de façon évidente $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 1$, le couple $(2 ; -1)$ est donc une solution particulière.

1. d. 3. On a $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 1$, donc, en multipliant par 146 :

$$8 \times 292 + 15 \times (-146) = 146.$$

Soit $(x ; y)$ un autre couple solution de (E), alors :

$$8x + 15y = 8 \times 292 + 15 \times (-146) \iff 8(x - 292) = 15(-y + 146). \quad (1)$$

15 et 8 sont premiers entre eux et 15 divise $8(x - 292)$, donc, d'après un théorème de Gauss, 15 divise $x - 292$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $x - 292 = 15k$. La relation (1) entraîne alors que $8 \times 15k = 15(-y + 146)$, d'où $y = -146 - 8k$.

Les couples solutions sont donc de la forme $(292 + 15k ; -146 - 8k)$.

Réciproquement, de tels couples sont bien solutions de (E) car :

$$8(292 + 15k) + 15(-146 - 8k) = 146.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathcal{S}_E = \{(292 + 15k ; -146 - 8k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

1. e. Soit x et y le nombre de nuitées passées respectivement dans les hébergements A et B, alors $24x + 45y = 438 \iff 8x + 15y = 146$. Il existe alors un entier relatif k tel que $x = 292 + 15k$, et par ailleurs $x \geq 0$ et $x \leq 13$, d'où :

$$0 \leq 292 + 15k \leq 13 \iff -\frac{292}{15} \leq k \leq -\frac{279}{15}.$$

Comme $-\frac{292}{15} \approx -19,47$ et $-\frac{279}{15} = -18,6$, la seule possibilité est que $k = -19$.

On en déduit que :

$$x = 292 + 15 \times (-19) = 7 \text{ et que } y = -146 - 8 \times (-19) = 6$$

Ce randonneur a donc passé **7 nuits en hébergement A et 6 nuits en hébergement B.**