Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S
Centres étrangers

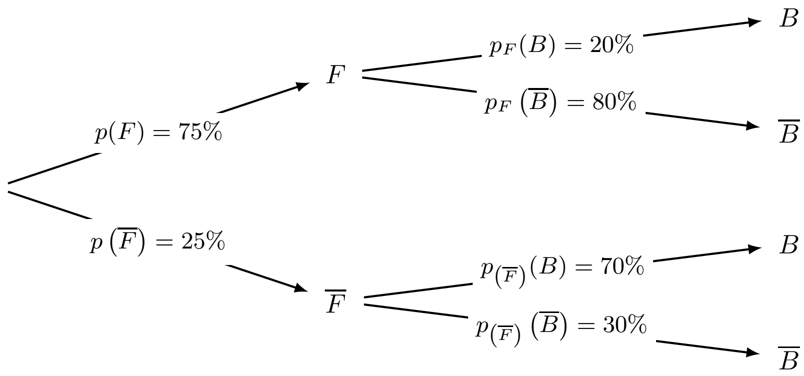
Série S Obligatoire et Spécialité
Jeudi 12 Juin 2014
Correction

Exercice 1. QCM - Probabilités 4 points

Commun à tous les candidats.

1. Question 1 : $\boxed{\textbf{Réponse c. : } 0,462}$.

On peut résumer les données à l'aide d'un arbre :



- On note F l'événement « être une femme » et B celui « acheter un article de bricolage » :
- « Une femme sur cinq achète un article de bricolage » se traduit par : $p_F(B) = \dfrac{1}{5} = 20\%$;
- « Sept hommes sur cinq achètent un article de bricolage » se traduit par : $p_{\left(\overline{F}\right)}(B) = 70\%$.

La probabilité que la personne, choisie au hasard, qui a fait un achat au rayon bricolage soit une femme est donnée par $p_B(F)$.

- **Calculons $p(B)$.**
  D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(F \cap B) + p\left(\overline{F} \cap B\right) \\ &= p(F) \times p_F(B) + p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(B) \\ p(B) &= 0,75 \times 0,2 + 0,25 \times 0,7 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(B) = 0,325}$$

- **Calculons $p_B(F)$.**

$$\begin{aligned} p_B(F) &= \frac{p(F \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{p(F) \times p_F(B)}{p(B)} \\ p_B(F) &= \frac{0,75 \times 0,2}{0,325} \end{aligned}$$

On a donc arrondi au millième :

$$\boxed{p_B(F) \approx 0,462}$$

2. Question 2 : $\boxed{\textbf{Réponse d. : } 0,267}$.

On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle d'ordinateur.
On note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si le client n achète un ordinateur et 0 sinon.
On note S la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant acheté un ordinateur de ce modèle.
On a donc :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

Vérifions les hypothèses de validation d'une loi binomiale :

- Un client a 2 états : il achète l'ordinateur ou il ne l'achète pas. La probabilité qu'il l'achète est donc : $p = 0,3$ et X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p
- Les 10 clients sont choisis au hasard, les tirages sont aléatoires ;
- Les tirages sont indépendants et identiques.

De ce fait, la variable aléatoire S désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière **indépendante**, de n **épreuves de Bernoulli** de paramètre p. La variable **S suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$**.

On cherche la probabilité de l'évènement $(S = 3)$.
Or puisque S suit une loi Binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,063$ on a :

$$P(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et de ce fait

$$\boxed{P(S = 3) = \binom{10}{3} \times (0,3)^3 \times (0,7)^7 \approx 0{,}267}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.binomDdP}(10, 0.3, 3) \approx 0{,}266\,827\,932$$

3. Question 3 : $\boxed{\textbf{Réponse c. : } 0,472}$.

Définition 1

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire à densité T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \lambda \,\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Propriété 1

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

La variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{8}$ donc on a :

$$\boxed{p(T \geq 6) = \mathrm{e}^{-6\lambda} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} \approx 0,472}$$

4. Question 4 : $\boxed{\textbf{Réponse a. : } 0,16}$.

Soit X une variable aléatoire qui donne la masse, exprimée en grammes, des baguettes de pains. On admet que X suit une loi normale de moyenne 200 g et d'écart type σ. On rappelle la propriété suivante :

Propriété 2 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma\right) \approx 0,683 \tag{1}$$

$$P\left(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma\right) \approx 0,954 \tag{2}$$

$$P\left(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma\right) \approx 0,997 \tag{3}$$

On a donc en appliquant cette propriété :

$$P\left(200-2\sigma \leq X \leq 200+2\sigma\right) \approx 0,954$$

Or on sait que :

$$P\left(184 \leq X \leq 216\right) \approx 0,954$$

On en déduit alors que l'écart type vaut $\sigma = 8$ et donc que :

$$X \sim \mathcal{N}\left(200\,;\,8^2\right)$$

La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-2} près :

$$\boxed{P\left(X \leq 192\right) \approx 0{,}16}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(0, 192, 200, 8) \approx 0{,}158\,655\,259\,6$$

Exercice 2. Suites et complexes — 4 points

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1.

1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3.
On a facilement

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \times 16$$

donc :

$$\boxed{z_1 = 8\ (1+\mathrm{i})}$$

$$z_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \times 8\ (1+\mathrm{i})$$

donc :

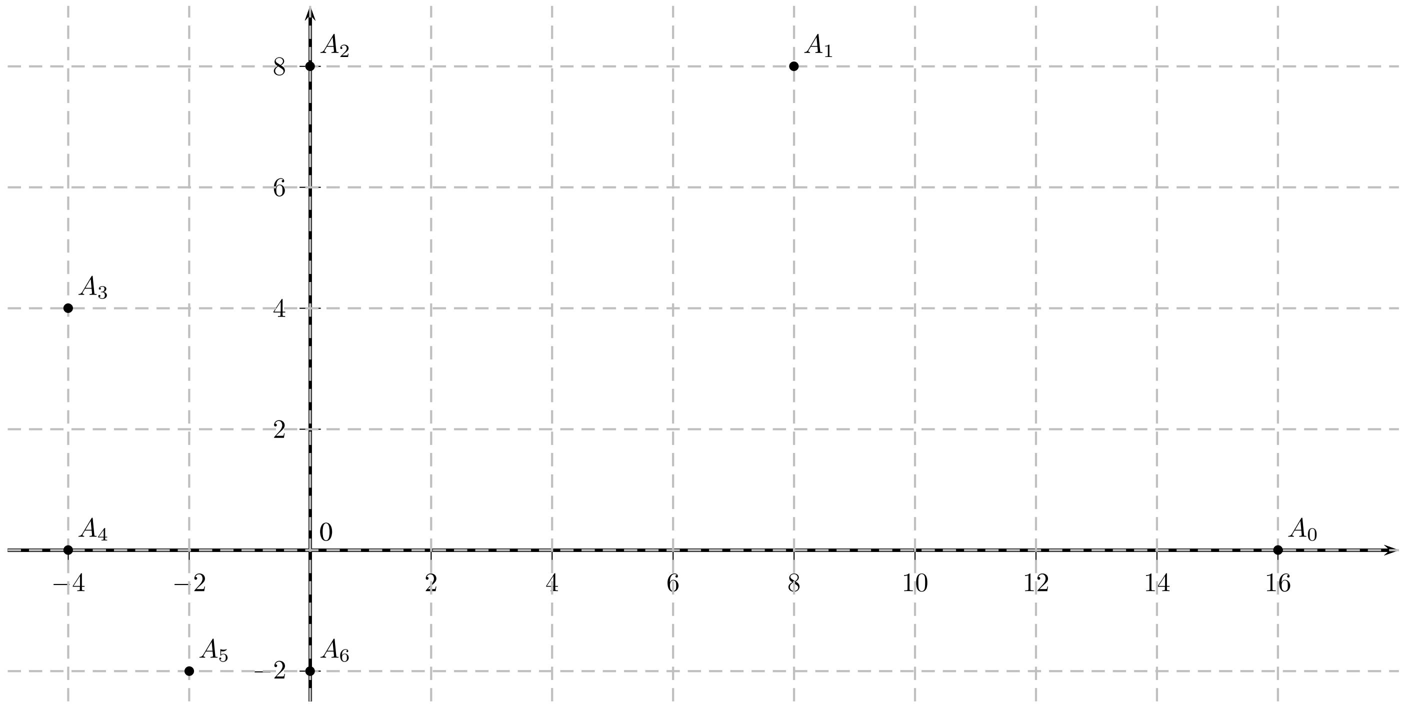
$$\boxed{z_2 = 8\ \mathrm{i}}$$

$$z_3 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \times 8\ \mathrm{i}$$

donc :

$$\boxed{z_3 = -4+4\ \mathrm{i}}$$

1. b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.



1. c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.

- Le module de ce nombre complexe est :

$$\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- On peut alors écrire

$$\frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{i}\right)$$

$$\boxed{\frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

1. d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

Le repère étant orthonormé, le calcul de distances est légitime avec :

$$\begin{aligned} OA_1 &= |z_1| = |8\ (1+\mathrm{i})| = 8\ |1+\mathrm{i}| = 8\sqrt{2} \\ A_1A_0 &= |z_0 - z_1| = |8 - 8\ \mathrm{i}| = 8\ \sqrt{2} \\ OA_0 &= |z_0| = 16 \end{aligned}$$

- Le triangle OA_0A_1 est isocèle en A_1 car :

$$\boxed{OA_1 = A_1A_0 = 8\ \sqrt{2}}$$

- En outre on a

$$OA_1^2 + A_1A_0^2 = 2 \times \left(8\ \sqrt{2}\right)^2 = 256 = 16^2$$

  Donc on a l'égalité

$$OA_1^2 + A_1A_0^2 = OA_0^2$$

  et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1.

Le triangle **OA_0A_1 est donc isocèle rectangle en A_1**.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter géométriquement le résultat précédent.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ r_{n+1} &= |z_{n+1}| = \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\ z_n\right| \\ r_{n+1} &= \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| \\ r_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ r_n \end{aligned}$$

La suite (r_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et de premier terme $r_0 = 16$**.

$$\boxed{(r_n) : \begin{cases} r_0 &= 16 \\ r_{n+1} &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ r_n \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}} \text{ , soit } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ r_n = 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$$

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ et d'après le théorème 1 :

$$\lim_{n \to +\infty} 16 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (r_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} r_n = 0}$$

Cela signifie donc que **la distance OA_n tend vers 0 et que donc le point A_n « se rapproche » de O**.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. 3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\,;\ A_nA_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| \\ &= \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\, z_n - z_n\right| \\ &= \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2} - 1\right| \times |z_n| \\ &= \left|\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| \\ A_nA_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\, r_n = r_{n+1}\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \ A_nA_{n+1} = r_{n+1}}$$

3. b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\,;\ L_n &= \sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n \\ L_n &= \sum_{i=1}^{n} r_i = r_1 + r_2 + \cdots + r_n\end{aligned}$$

donc L_n est la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique (r_n), de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et de premier terme de la somme $r_1 = |z_1| = 8\sqrt{2}$. D'après la formule du cours on peut donc écrire que :

$$\begin{aligned}L_n &= \Big(\text{premier terme de la somme}\Big) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \\ L_n &= 8\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} \\ L_n &= \frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ L_n = \left(16 + 16\sqrt{2}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}$$

3. c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

D'après le théorème 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$$

soit

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (L_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = \left(16 + 16\sqrt{2}\right)}$$

Exercice 3. Étude de fonction — 7 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

1. a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

La fonction f_1 vérifie les 4 propriétés :

- On a $f(0) = 0$;
- On a $f(1) = 4 - 6 + 3 = 1$;
- La fonction f_1 est une fonction polynôme donc elle est définie et continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- La fonction f_1 est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ avec :

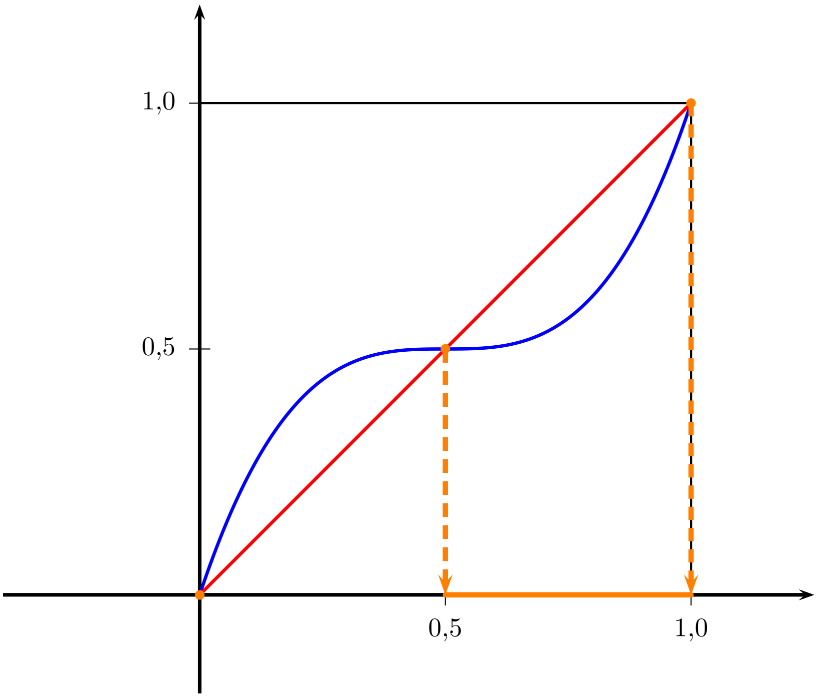
$$\begin{aligned} \forall x \in [0\ ;\ 1]\ ;\ f_1'(x) &= 12x^2 - 12x + 3 \\ f_1'(x) &= 12\left(x^2 - 1x + \frac{1}{4}\right) \\ f_1'(x) &= 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

f_1 est donc croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

La fonction f_1 est donc **une fonction de retouche**.

1. b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles. Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

Les solutions de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_{f_1}$ qui sont sous la première bissectrice, points d'intersections inclus.



On a donc :

$$\boxed{f_1(x) \leqslant x \Longleftrightarrow \{0\} \cup [0,5\ ;\ 1]}$$

Cela signifie donc que **la fonction f_1 assombrie les nuances inférieures à $0,5$ et éclaircie celles supérieures à $0,5$**.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

2. a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e} - 2) - (\mathrm{e} - 1)x}{1 + (\mathrm{e} - 1)x}$;

La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,1]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,1]$. On a alors facilement :

$$\boxed{g'(x) = f_2'(x) - 1}$$

La fonction f_2 est de la forme $\ln u$ avec pour x dans $[0\,;\,1]$:

$$f_2'(x) = \ln u(x) \text{ avec } \quad u(x) = 1 + (\mathrm{e} - 1)x \quad et \quad u'(x) = \mathrm{e} - 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\ ;\ 1],\ \ g'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 \\ g'(x) &= \frac{\mathrm{e} - 1}{1 + (\mathrm{e} - 1)x} - 1 \\ g'(x) &= \frac{\mathrm{e} - 1 - 1 - (\mathrm{e} - 1)x}{1 + (\mathrm{e} - 1)x} \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 1],\ \ g'(x) = \frac{(\mathrm{e} - 2) - (\mathrm{e} - 1)x}{1 + (\mathrm{e} - 1)x}}$$

2. b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e} - 2}{\mathrm{e} - 1}$, maximum ont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

- On a $\mathrm{e} > 1$ donc le dénominateur de la fonction dérivée est strictement positif sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
- Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $g'(x)$ est donc du signe de son numérateur : $(\mathrm{e} - 2) - (\mathrm{e} - 1)x$. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\ ;\ 1]\ ;\ g'(x) > 0 &\iff (\mathrm{e} - 2) - (\mathrm{e} - 1)x > 0 \\ &\iff (\mathrm{e} - 2) > (\mathrm{e} - 1)x \end{aligned}$$

et puisque $(\mathrm{e} - 1) > 0$ on a

$$\forall x \in [0\ ;\ 1]\ ;\ g'(x) > 0 \iff \frac{(\mathrm{e} - 2)}{(\mathrm{e} - 1)} > x\ ;\ x \in [0\ ;\ 1]$$

et de même

$$\forall x \in [0\ ;\ 1]\ ;\ g'(x) = 0 \iff \frac{(\mathrm{e} - 2)}{(\mathrm{e} - 1)} \approx 0,42 \in [0\ ;\ 1]$$

- En conséquence en posant $x_1 = \dfrac{(\mathrm{e} - 2)}{(\mathrm{e} - 1)} \approx 0,42 \in [0\ ;\ 1]$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g'(x) > 0 \iff x \in [0\ ;\ x_1[\\ g'(x) = 0 \iff x = x_1 \end{array}\right\} \implies \ g'(x) < 0 \iff x \in\ ]x_1\ ;\ 1]}$$

- **La fonction g est donc croissante sur $[0\ ;\ x_1[$ puis décroissante sur $]x_1\ ;\ 1]$ et admet un maximum en $x_1 = \dfrac{(\mathrm{e} - 2)}{(\mathrm{e} - 1)}$ qui vaut $g\left(x_1\right) \approx 0,12$.**

x	0		α		x_1		β		1
$g'(x)$		$+$			0			$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	0.05	$\nearrow$	$g(x_1) \approx 0.12$	$\searrow$	0.05	$\searrow$	0

2. c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle [0 ; 1] deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$. On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

> **Théorème 2** (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)
>
> Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
> alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Sur l'intervalle $[x_1\ ;\ 1]$:

- La fonction g est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle $[x_1\ ;\ 1]$;
- L'image par g de l'intervalle $[x_1\ ;\ 1]$ est $[g(x_1)\ ;\ 1]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0,05$ appartient à l'intervalle image car $0 < 0,05 < g(x_1) \approx 0,12$

  Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = k = 0,05$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[x_1\ ;\ 1]$.

De même sur l'intervalle $[0\ ;\ x_1]$:

- La fonction g est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0\ ;\ x_1]$;
- L'image par g de l'intervalle $[0\ ;\ x_1]$ est $[0\ ;\ g(x_1)]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0,05$ appartient à l'intervalle image car $0 < 0,05 < g(x_1) \approx 0,12$

  Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = k = 0,05$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ x_1]$.

Pour conclure : l'équation $g(x) = 0,05$ admet exactement deux solutions dans $[0 ; 1]$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche. Quel est le rôle de cet algorithme ?
L'algorithme calcule le nombre de nuances pour lesquelles la modification de nuances est perceptible visuellement.

2. Quelle valeur affichera l'algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie A ?
On cherche donc les valeurs de x telles que $f_2(x) - x \geq 0,05$ c'est-à-dire $g(x) \geq 0,05$. Ce sont donc toutes les nuances comprises entre les 2 solutions α et β de la partie précédente. On va donc prendre toutes les nuances comprises entre $0,09$ et $0,85$. Il y en a par conséquent :

$$\boxed{85 - 9 + 1 = 77}$$

L'algorithme affichera donc 77.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.
On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image   celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_3(x) = x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)} \qquad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. 1. a. Calculer $\mathcal{A}_{f_3}$.
La fonction f_3 est une fonction de retouche donc elle est **positive sur l'intervalle [0 ; 1]** puisque croissante avec $f_3(0) = 0$. De ce fait, l'aire $\mathcal{A}_{f_3}$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f_3, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ est donnée par :

$$\mathcal{A}_{f_3} = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A}_{f_3} = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)}\,\mathrm{d}x$$

donc f_3 est de la forme $\frac{1}{2}\,u'\,\mathrm{e}^{\,u}$ dont une primitive est $\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{\,u}$ et de ce fait

$$\mathcal{A}_{f_3} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\,x^2-1}\right]_0^1$$

soit, exprimée en unités d'aire

$$\boxed{\mathcal{A}_{f_3} = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{\,-1}\right) \approx 0,316 \text{ u.a.}}$$

1. b. Calculer $\mathcal{A}_{f_4}$
La fonction f_4 est une fonction de retouche donc elle est **positive sur l'intervalle [0 ; 1]** puisque croissante avec $f_4(0) = 0$. De ce fait, l'aire $\mathcal{A}_{f_4}$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f_4, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ est donnée par :

$$\mathcal{A}_{f_4} = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A}_{f_4} = \int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right)\mathrm{d}x$$

or une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x+4}$ est de la forme $x \longmapsto \ln|x+4|$ donc

$$\mathcal{A}_{f_4} = \left[\frac{4x^2}{2} - 15x + 60\ \ln|x+4|\right]_0^1$$

soit, exprimée en unités d'aire

$$\boxed{\mathcal{A}_{f_4} = 60\ln\left(\frac{5}{4}\right) - 13 \approx 0,389 \text{ u.a.}}$$

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?
La fonction f_3 a donc l'aire la plus petite. C'est elle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image.

Exercice 4. Obligatoire : Géométrie dans l'espace — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$\mathrm{A}(1\,;\,2\,;\,7),\quad \mathrm{B}(2\,;\,0\,;\,2),\quad \mathrm{C}(3\,;\,1\,;\,3),\quad \mathrm{D}(3\,;\,-6\,;\,1)\ \text{et}\ \mathrm{E}(4\,;\,-8\,;\,-4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont clairement pas proportionnelles.

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2}$$

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

2. Soit $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

2. a. Déterminer les valeurs de b et c telles que $\overrightarrow{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

Les points A, B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Théorème 3

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ non colinéaires de ce plan.

Donc d'après le théorème 3 on a donc :

$$\overrightarrow{u}\ \text{normal à (ABC)} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u}\ \text{normal à (ABC)} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}\,.\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix} = 0 \\ \\ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}\,.\,\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u}\ \text{normal à (ABC)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2b - 5c = 0 \\ 2 - b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u}\ \text{normal à (ABC)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 5c = 1 \\ b + 4c = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u}\ \text{normal à (ABC)} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases}}$$

2. b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.

Propriété 3

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.

Donc d'après la propriété 3 :

$$\begin{aligned}
M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) &\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-7 \end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) &\iff (x-1) - 2(y-2) + (z-7) = 0 \\
M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) &\iff x - 2y + z - 4 = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{(ABC) \ : \ x - 2y + z - 4 = 0}$$

2. c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

Le point D$(3\,;\,-6\,;\,1)$ appartient au plan (ABC) si ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

$$x_D - 2y_D + z_D - 4 = 3 - 2 \times (-6) + 1 - 4 = 12 \neq 0$$

Donc **le point D n'appartient pas au plan (ABC)**.

3. On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= 2t+3 \\ y &= -4t+5 \\ z &= 2t-1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

3. a. La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est colinéaires au vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, normal au plan (ABC), puisque $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$. **La droite D est donc orthogonale au plan (ABC)**.

3. b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

La droite $\mathcal{D}$ est donc orthogonale au plan (ABC) donc elle n'est pas parallèle au plan. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC) on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x = \ \ 2t+3 \\ y = -4t+5 \\ z = \ \ 2t-1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Pour cela on va injecter dans l'équation du plan les équations paramétriques de la droite.

$$(2t+3) - 2(-4t+5) + (2t-1) - 4 = 0 \iff 12t - 12 = 0 \iff t = 1$$

On obtient donc pour $t = 1$ les coordonnées du point d'intersection H : $\boxed{H(5\,;\,1\,;\,1)}$.

4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

On a :

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 4 - 5 = 0$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à un vecteur normal au plan (ABC). **La droite (DE) est donc parallèle au plan (ABC) et non incluse** car le point D n'appartient pas à ce plan d'après la question **2.c.**

Exercice 4. Spécialité : Arithmétique et matrices — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : préliminaires

1. 1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que : $n^2 \equiv N-1 \quad$ modulo N.
Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad$ modulo N.

$$n \times n^3 \equiv \left(n^2\right)^2 \quad \text{modulo } N$$

or $n^2 \equiv N-1 \quad$ modulo N donc

$$n \times n^3 \equiv (N-1)^2 \quad \text{modulo } N$$
$$n \times n^3 \equiv N^2 - 2N + 1 \quad \text{modulo } N$$

Soit

$$\boxed{n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N}$$

1. b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad$ modulo 26.
On a pour $N = 26$ et $n = 5$:

$$5^2 \equiv 26 - 1 \quad \text{modulo } 26$$

donc en appliquant la question **1.a.** :

$$5 \times 5^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$$

Donc il existe un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad$ modulo 26 qui vaut

$$\boxed{k_1 = 5^3 = 125 \equiv 21 \quad \text{modulo } 26}$$

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

2. a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

$$6A - A^2 = 6\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$6A - A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

on a donc en notant I la matrice identité 2×2 :

$$\boxed{6A - A^2 = 5\ I}$$

2. b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.
D'après la question précédente **2.a.** :

$$6A - A^2 = 5I \Longleftrightarrow A \times \frac{1}{5}(6I - A) = I$$

La matrice A est donc inversible avec

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{5}(6I - A)}$$

2. c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

$$\boxed{5A^{-1} = (6I - A) = \begin{pmatrix} 6-4 & -1 \\ -3 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = B}$$

2. d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.
Si $AX = Y$ alors en multipliant les deux membres, à gauche, par la matrice B on obtient

$$BAX = BY$$

Or d'après la question **2.c.** $B = 5A^{-1}$, donc

$$5X = BY$$

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot « ET » à coder est remplacé par la matrice $\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}}$.
- La matrice X est transformée en la matrice $Y = AX = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$ soit $\boxed{Y = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix}}$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} 35 & \text{modulo } 26 \\ 50 & \text{modulo } 26 \end{pmatrix}$ soit $\boxed{R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}}$.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé donc « JY »

En résumé : $\boxed{\text{« ET »(mot à coder)} \to X \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix} \to \text{« JY » (mot codé)}}$.

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

1. Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$

D'après la question **A.2.d.**, puisque $AX = Y$, alors $5X = BY$ soit :

$$\boxed{5X = BY \iff 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{cases}}$$

2. En utilisant la question 1. b. de la partie A, établir que : $\begin{cases} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{cases}$ **modulo 26**

D'après la question **1.b** de la **partie A** on a

$$5 \times 21 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$$

Donc en multipliant les 2 lignes du système précédent par 21 on obtient :

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & 42y_1 - 21y_2 \\ x_2 & \equiv & -63y_1 + 84y_2 \end{cases} \text{modulo } 26 \iff \boxed{\begin{cases} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \text{modulo } 26}$$

3. Décoder le mot « QP ».

« QP » est associé à $R = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix}$ donc $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & \text{modulo } 26 \\ 15 & \text{modulo } 26 \end{pmatrix}$

D'après la question précédente **C.2.** on a :

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \text{modulo } 26 \iff \begin{cases} x_1 & \equiv & 16 \times 16 + 5 \times 15 \\ x_2 & \equiv & 15 \times 16 + 6 \times 15 \end{cases} \text{modulo } 26$$

soit

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & 331 \\ x_2 & \equiv & 330 \end{cases} \text{modulo } 26 \iff \begin{cases} x_1 & \equiv & 19 \\ x_2 & \equiv & 18 \end{cases} \text{modulo } 26$$

$$\boxed{\text{Donc } X = \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ est associé au mot « TS »}}$$

- Fin du Devoir -