



Exercice 2. Suites et complexes

4 points

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. **1. a.** Calculer z_1, z_2 et z_3 .
 1. **b.** Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.
 1. **c.** Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
 1. **d.** Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.

$$\text{Ainsi } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

3. **3. a.** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.
3. **b.** Donner une expression de L_n en fonction de n .
3. **c.** Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .



Exercice 3. Étude de fonction

7 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

1. a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

1. b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombriement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

2. a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$: $g'(x) = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}$;

2. b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$.

Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e - 2}{e - 1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.



2. c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.
On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (écart) c (compteur) k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire x prend la valeur $\frac{k}{100}$ y prend la valeur $f(x)$ E prend la valeur $ y - x $ Si $E \geq 0,05$, faire c prend la valeur $c + 1$ Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

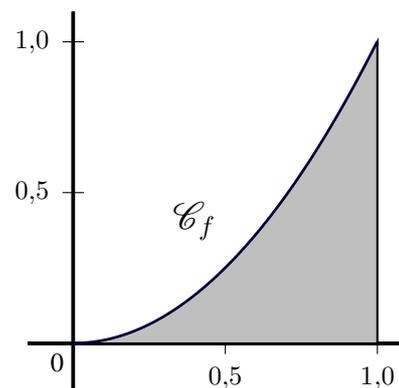
2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) \leq x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire \mathcal{A}_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_3(x) = xe^{(x^2-1)} \quad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. 1. a. Calculer \mathcal{A}_{f_3} .
1. b. Calculer \mathcal{A}_{f_4} .
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?



Exercice 4. Obligatoire : Géométrie dans l'espace

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1 ; 2 ; 7), \quad B(2 ; 0 ; 2), \quad C(3 ; 1 ; 3), \quad D(3 ; -6 ; 1) \text{ et } E(4 ; -8 ; -4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\vec{u}(1 ; b ; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
 2. a. Déterminer les valeurs de b et c telles que \vec{u} soit un vecteur normal au plan (ABC).
 2. b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.
 2. c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
3. On considère la droite \mathcal{D} de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

3. a. La droite \mathcal{D} est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
 3. b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (ABC).
4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).



Exercice 4. Spécialité : Arithmétique et matrices

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : préliminaires

1. 1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \pmod{N}.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \pmod{N}$.

1. b. Dédurre de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \pmod{26}$.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leq k \leq 25$ et $5k \equiv 1 \pmod{26}$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

2. a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

2. b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1} , peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

2. c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

2. d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).



Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que :
$$\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases} .$$

2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

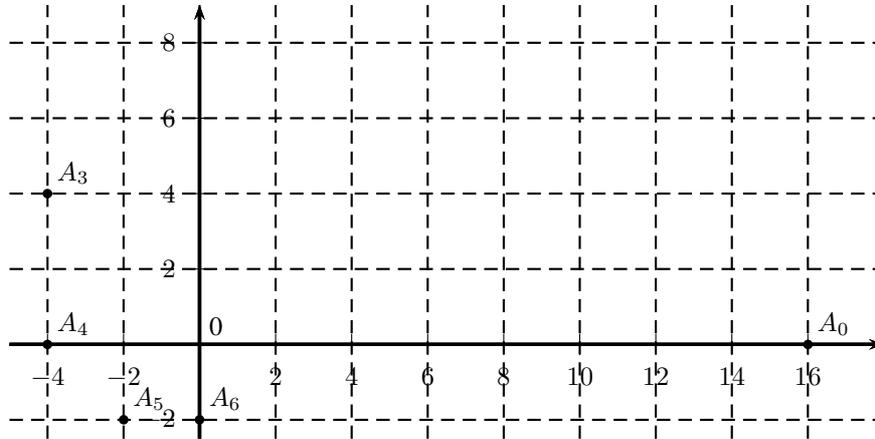
$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « QP ».



Annexe à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 2



Annexe relative à l'exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1

