Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S Polynésie

Série S Obli. et Spé.
Vendredi 13 juin 2014
Correction

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. Géométrie dans l'espace — 5 points

Commun à tous les candidats.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$\mathrm{A}(5\ ;\ -5\ ;\ 2), \mathrm{B}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0), \mathrm{C}(0\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et } \mathrm{D}(6\ ;\ 6\ ;\ -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

On est dans un **repère orthonormé** donc le calcul de distances avec les formules usuelles est légitime :

- On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et donc $BC = \left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$ u.l.
- On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}$ et donc $CD = \left|\left|\overrightarrow{CD}\right|\right| = \sqrt{6^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{70}$ u.l.
- Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux car leur produit scalaire est nul, $\overrightarrow{CD}\ .\ \overrightarrow{BC} = 6+0-6=0$.
  Donc **le triangle BCD est rectangle en C**.
- Étant rectangle en C, le triangle ne peut être qu'isocèle qu'en C car son hypoténuse [BD] est le plus grand côté.
  Or $CD \neq BC$ donc le triangle BCD n'est pas isocèle.
- L'aire du triangle BCD, rectangle en C est donnée par le produit des côtés perpendiculaires divisé par 2 donc :

$$\boxed{\mathscr{A}_{BCD} = \frac{CB \times CD}{2} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}\text{ u.a.}}$$

2. 2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

Théorème 1

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ non colinéaires de ce plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc ils ne sont pas colinéaires et engendrent donc le plan (BCD).

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} . \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = -2+0+2=0 \\ \\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} . \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix} = -12+15-3=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{CD} = 0 \end{array}\right.$$

Donc d'après le théorème 1, **le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BCD)** car il est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ non colinéaires de ce plan.

2. b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

Propriété 1

Soit vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul et un point C de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par C et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Donc d'après la propriété 1 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BCD) \iff \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-0\\y-1\\z-2\end{pmatrix} . \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BCD) \iff -2x+3(y-1)+(z-2)=0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BCD) \iff -2x+3y+z-5=0$$

$$\boxed{(BCD) \ : \ -2x+3y+z-5=0}$$

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (BCD) donc un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$, normal au plan (BCD). La droite passant par le point A est alors l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{n}$. On a alors :

$$\mathscr{D} = \left\{ M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\, \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y+5\\z-2\end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \quad , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{D} \ : \left\{\begin{array}{rl} x = & -2t+5 \\ y = & 3t-5 \\ z = & t+2 \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}}$$

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (DBC) donc elle n'est pas parallèle à ce plan. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (DBC) on doit résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+3y+z-5=0 \\ x = -2t+5 \\ y = \ \ 3t-5 \\ z = \ \ \ t+2 \end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Pour cela on va injecter dans l'équation du plan les équations paramétriques de la droite.

$$-2(-2t+5)+3(3t-5)+(t+2)-5=0 \iff 14t-28=0 \iff t=2$$

On obtient donc pour $t=2$ les coordonnées du point d'intersection H : $\boxed{H(1\,;\,1\,;\,4)}$.

5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\,\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante donc ici :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\mathscr{A}_{BCD} \times h$$

La droite $\mathscr{D}$ passant par le point A est orthogonale au plan (BCD) et coupe ce plan en H. De ce fait la hauteur du tétraèdre ABCD est $h = AH$.

$$h = AH = \sqrt{(1-5)^2 + (1+5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{56} \text{ u.l.}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\mathscr{A}_{BCD} \times AH = \frac{1}{3}\,\frac{5\sqrt{14}}{2} \times \sqrt{56} = \frac{70}{3} \text{ u.v.}}$$

6. On admet que AB = $\sqrt{76}$ et AC $= \sqrt{61}$. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

On a d'après le cours :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{\text{BAC}}$$

soit

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \sqrt{76} \times \sqrt{61} \times \cos\widehat{\text{BAC}}$$

or ici

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\6\\-2\end{pmatrix}\,.\,\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix} = 30 + 36 + 0 = 66$$

donc

$$\cos\widehat{\text{BAC}} = \frac{66}{\sqrt{76} \times \sqrt{61}}$$

d'où arrondi au dixième de degré près :

$$\boxed{\widehat{\text{BAC}} = \arccos\left(\frac{66}{\sqrt{76} \times \sqrt{61}}\right) \approx 14,2^\circ}$$

Exercice 2. Obligatoire : Suites 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.

- $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2$ soit $\boxed{u_1 = 2}$;
- $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2$ soit $\boxed{u_2 = 6}$;

2. On considère les deux algorithmes suivants :

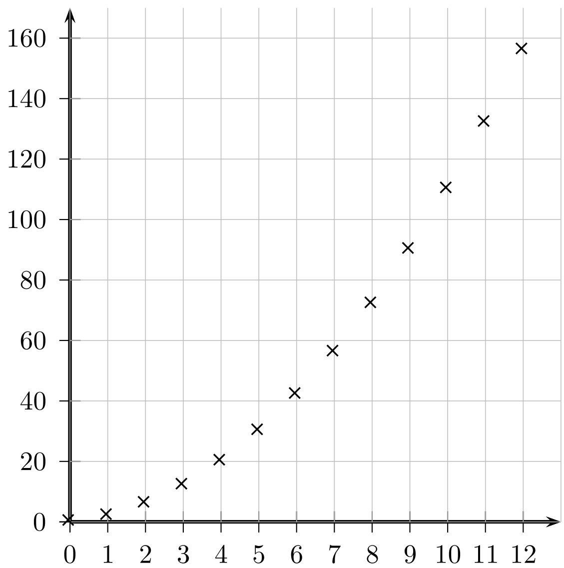
Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u + 2i + 2$		u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

Seul l'**algorithme B** permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, en entrant la valeur de l'entier naturel n.
L'algorithme A va afficher le terme u_{n+1}.

3. A l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



3. a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

Il semblerait que la suite (u_n) soit strictement **croissante** (et positive).

- Pour tout entier n on a :
$$u_{n+1} - u_n = 2n + 2 > 0$$
Donc **la suite (u_n) est strictement croissante**.
- En outre, son premier terme est $u_0 = 0$ donc les termes suivants sont supérieurs à $u_0 = 0$. La **suite est donc positive**.

3. b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$. Trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

On va résoudre un système en utilisant les premières valeurs du tableau.
Tout d'abord

$$u_0 = 0 \iff a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \iff \boxed{c = 0}$$

Et par la suite

$$\begin{cases} u_1 = 2 & \iff & a \times 1^2 + b \times 1 = 2 & \iff & a + b = 2 \\ u_2 = 6 & \iff & a \times 2^2 + b \times 2 = 6 & \iff & 4a + 2b = 6 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} a + \ \ b = 2 & : & (E_1) \\ 4a + 2b = 6 & : & (E_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a + \ \ b = 2 & : & (E_1) \\ \qquad 2b = 2 & : & (E_1') = 4\,(E_1) - (E_2) \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}}$$

De ce fait, on a pour tout entier n :

$$\boxed{u_n = n^2 + n}$$

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

4. a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

Si on utilise la modélisation proposée lors de la question **3.b.** on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n &= u_{n+1} - u_n \\ v_n &= (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n \\ v_n &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n \\ v_n &= 2n + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = 2n + 2}$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme 2.

4. b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

La somme S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2, or d'après la formule du cours on a :

$$\begin{aligned} S_n &= (\text{nombre de termes de la somme}) \times \frac{1^{\text{er}}\ \text{terme} + \text{dernier terme de la somme}}{2} \\ S_n &= (n+1) \times \frac{v_0 + v_n}{2} \\ S_n &= (n+1) \times \frac{2 + 2n + 2}{2} = (n+1) \times \frac{2n+4}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ S_n = (n+1)(n+2)}$$

4. c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

Pour tout entier n on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

or puisque $v_n = u_{n+1} - u_n$ on a :

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)$$

les termes s'éliminent deux à deux, il reste seulement $-u_0$ et u_{n+1}

$$S_n = -u_0 + (u_1 - u_1) + (u_2 - u_2) + \cdots + (u_n - u_n) + u_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ S_n = u_{n+1} - u_0}$$

En utilisant le résultat de la question **4.b.** on en déduit donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ n_n = S_{n-1} + u_0 = n(n+1)}$$

Exercice 2. Spécialité : Arithmétique — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

Avec le calcul (A) on obtient :

$$\boxed{1 \times 12 + 8 \times 37 = 308}$$

2. 2. a. Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A). Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.

- Avec le programme (A) : $\boxed{z = j \times 12 + m \times 37 = 12j + 37m}$;
- On a alors puisque : $\begin{cases} 12j & \equiv & 0 & \text{modulo } 12 \\ 37m & \equiv & 1 & \text{modulo } 12 \end{cases}$ $\boxed{z \equiv m \quad \text{modulo } 12}$.

2. b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 avec le programme (A).

- On a : $z = 474 \equiv 6 \quad \text{modulo } 12$
  Or d'après la question **2.a.**, les nombres z et m sont congrus modulo 12 donc **$m = 6$, le spectateur est donc né en Juin**.
- Puisque $z = 12j + 37m$ on en déduit que
  $$474 = 12j + 37 \times 6$$
  soit
  $$j = \frac{474 - 37 \times 6}{12} = 21$$
- **Le spectateur est né un 21 Juin**.

Partie B

Le magicien demande maintenant de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

1. Première méthode :
Modifier l'algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

Algorithme initial :

```
Variables :    j et m sont des entiers naturels
Traitement :   Pour m allant de 1 à 12 faire :
                   Pour j allant de 1 à 31 faire :
                       z prend la valeur 12j + 31m
                       Afficher z
                   Fin Pour
               Fin Pour
```

Algorithme modifié :

```
Variables :    j et m sont des entiers naturels
Traitement :   Pour m allant de 1 à 12 faire :
                   Pour j allant de 1 à 31 faire :
                       z prend la valeur 12j + 31m
                       Si z = 503
                           Afficher j
                           Afficher m
                       Fin Si
                   Fin Pour
               Fin Pour
```

2. Deuxième méthode :

2. a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

$$\begin{cases} 12j & \equiv & 0 & \text{modulo } 12 \\ 31m & \equiv & 7m & \text{modulo } 12 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{z = 12j + 31m \equiv 7m \quad \text{modulo } 12}$$

2. b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$7m$ modulo 12	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

2. c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

- On a : $z = 503 \equiv 11 \quad \text{modulo } 12$
  Or d'après la question **2.a.**, le nombres z et $7m$ sont congrus modulo 12 donc $7m \equiv 11 \quad$ modulo 12.
- D'après le tableau de la question **2.c.** on en déduit que $m = 5$ et donc que **le spectateur est né en Mai**.
- Puisque $z = 12j + 31m$ on en déduit que
$$503 = 12j + 31 \times 5$$
  soit
$$j = \frac{503 - 31 \times 5}{12} = 29$$
- **Le spectateur est né un 29 Mai**.

3. Troisième méthode :

3. a. Démontrer que le couple $(-2\ ;\ 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.
Pour $(x\ ;\ y) = (-2\ ;\ 17)$ on a :
$$12x + 31y = 12 \times (-2) + 31 \times 17 = 503$$

3. b. En déduire que si un couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ est solution de $12x + 31y = 503$, alors $12(x + 2) = 31(17 - y)$.
On écrit :
$$\begin{cases} 12 \times (-2) + 31 \times 17 & = 503 \\ 12x + 31y & = 503 \end{cases}$$
En soustrayant les deux égalités on obtient
$$12x + 31y - \Big(12 \times (-2) + 31 \times 17\Big) = 0$$
soit
$$12x - 12 \times (-2) = 31 \times 17 - 31y$$
puis en factorisant à gauche et droite par respectivement 12 et 31 :
$$12(x + 2) = 31(17 - y)$$
Pour conclure on a montré que :
$$\boxed{12x + 31y = 503 \Longrightarrow 12(x + 2) = 31(17 - y)}$$

3. c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers $(x\ ;\ y)$, solutions de $12x + 31y = 503$.

- On a montré à la question précédente que si $12x + 31y = 503$ alors
$$12(x + 2) = 31(17 - y) \qquad (1)$$

Théorème 2 (Carl Friedrich Gauss (1777-1855))

Soit a, b, c des entiers.
Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c.

- Les entiers 12 et 31 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, l'égalité 1 implique que :
  – L'entier 12 divise $17 - y$ et donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $17 - y = 12k$
  – L'entier 31 divise $x + 2$ et donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $x + 2 = 31k'$
  – En reportant les valeurs dans l'égalité 1 on obtient
$$12 \times 31k' = 31 \times 12k$$
  et donc $k = k'$.

- On a donc montré qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} x+2 &= 31k \\ 17-y &= 12k \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -2+31k \\ y &= 17-12k \end{cases}$$

- **Réciproquement** : si

$$\begin{cases} x &= -2+31k \\ y &= 17-12k \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}$$

alors

$$12x+31y = 12(-2+31k)+31(17-12k) = 12\times(-2)+31\times 17 = 503$$

Les solutions de l'équation sont donc les couples

$$\boxed{(-2+31k\ ;\ 17-12k) \quad ;\ \forall k \in \mathbb{Z}}$$

3. d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ tel que $1 \leqslant y \leqslant 12$. En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

On cherche un relatif k tel que

$$\begin{aligned} 1 \leqslant y \leqslant 12 &\iff 1 \leqslant 17-12k \leqslant 12 \\ &\iff -16 \leqslant -12k \leqslant -5 \\ &\iff \frac{5}{12} \leqslant k \leqslant \frac{16}{12} \end{aligned}$$

et puisque k est entier on a

$$1 \leqslant y \leqslant 12 \iff k=1$$

Il existe donc un unique couple solution $(x\ ;\ y)$ tel que $1 \leqslant y \leqslant 12$: $\boxed{(29\ ;\ 5)}$.

On retrouve la date du **29 mai**.

Exercice 3. Vrai/Faux — 5 points

Commun à tous les candidats

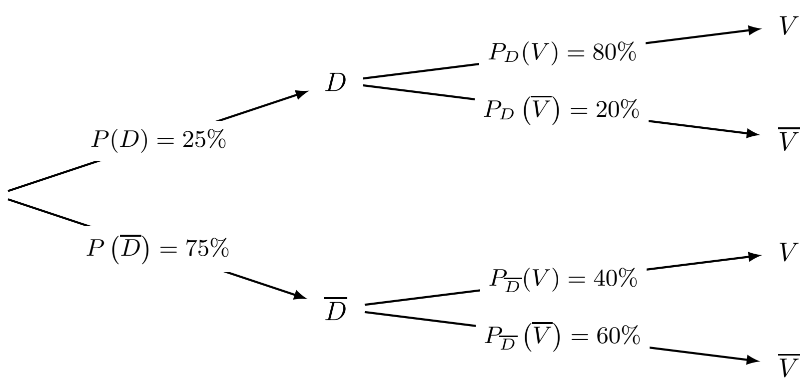
1. Affirmation 1 : VRAIE.

> **Proposition 1** (VRAIE)
>
> **Affirmation n° 1 :** « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

On appelle D l'évènement « Il pleut » et V l'évènement « Zoé se rend en voiture à son travail » on a d'après les données :

- Il pleut un jour sur quatre donc $P(D) = 25\%$;
- Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas DONC / $P_D(V) = 80\%$.
- Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à $0,6$ donc : $P_{\overline{D}}\left(\overline{V}\right) = 60\%$.

On peut résumer cela dans un arbre :



D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(V) = P(V \cap D) + P\left(V \cap \overline{D}\right)$$
$$P(V) = P(D) \times P_D(V) + P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(V)$$
$$P(V) = 0,25 \times 0,8 + 0,75 \times 0,4 = 0,5$$

Puisque $P(V) = 0,5$, l'**affirmation 1 est vraie**, « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. ».

2. Affirmation 2 : VRAIE.

> **Proposition 2** (VRAIE)
>
> Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.
> **Affirmation n° 2 :**
> « Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »

on va utiliser la caractérisation suivante :

> **Propriété 2**
>
> Deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si, et seulement si :
>
> $$p\left(A \cap B\right) = p(A) \times p(B)$$

D'après la propriété des probabilités totales on a :

$$p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

Les évènements A et B sont indépendant donc d'après la propriété 2 :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A) \times p(B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) \\ p\left(A \cap \overline{B}\right) &= p(A) - p(A) \times p(B) \\ p\left(A \cap \overline{B}\right) &= p(A) \times (1 - p(B)) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) \times p\left(\overline{B}\right)}$$

Et donc en appliquant à nouveau la caractérisation de la propriété 2, on en conclut que A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. La **proposition 2 est donc vraie**.

3. On modélise le temps d'attente, en minutes, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,7$.

Proposition 3 (FAUSSE)

Affirmation n° 3 :
« La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est $0,7$ environ. »

Propriété 3

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a tel que $0 \leq a$:

$$P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

La **proposition 3 est donc fausse** car :

$$\boxed{P(T > 5) = \mathrm{e}^{-0,7 \times 5} \approx 0,03}$$

Proposition 4 (FAUSSE)

Affirmation n° 4 :
« Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

Le temps d'attente moyen est donnée par l'espérance qui vaut $\dfrac{1}{\lambda}$, **l'affirmation 4 est fausse** car :

$$\boxed{E(T) = \frac{1}{0,7} \approx 1,4 \text{ min}}$$

4. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang. On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.

Proposition 5

Affirmation nº 5 :
« On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. »

On va regarder si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique. Si c'est le cas, on considérera que l'hypothèse est acceptée au seuil de 95%

Théorème 3 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$
Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

où p désigne la proportion de ce caractère dans la population.

On a $n = 183$, $p = 39\%$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 183 \geq 30 \\ \checkmark & np = 183 \times 39\% = 71,37 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 183 \times 61\% = 111,63 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions de validité sont réunies donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F_{183} est :

$$I_{183} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,39 - 1,96\frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}} \; ; \; 0,39 + 1,96\frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}} \right]$$

soit

$$\boxed{I \approx [31,9\% \; ; \; 46,1\%]}$$

La fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation $\boxed{f = 34\% \in I_{183}}$, donc

« On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. », **l'affirmation 5 est vraie**.
On applique en fait la propriété suivante :

Propriété 4

On considère une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un caractère est** p. On **observe** f comme fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille n. Si I_n est l'intervalle de fluctuation de la fréquence à 95% dans les échantillons de tailles n, alors la **règle de décision** est la suivante :

- **si** $f \in I_n$: on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en cause et on l'**accepte** ;
- **si** $f \notin I_n$: on **rejette** l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

Exercice 4. Étude de fonction — 5 points

Commun à tous les candidats
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = 2\mathrm{e}^{x/2} - 1$.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

- **On va en faire un peu plus que demandé en cherchant tous les points d'intersection des deux courbes**.
  Les abscisses des points d'intersection, si ils existent, des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions réelles de l'équation :

$$f(x) = g(x) \iff \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{x/2} - 1 \iff \left(\mathrm{e}^{x/2}\right)^2 - 2\mathrm{e}^{x/2} + 1 = 0$$

  en posant $X = e^{x/2}$ on se ramène à une équation du second degré :

$$f(x) = g(x) \iff \begin{cases} X = e^{x/2} \\ X^2 - 2X + 1 = 0 = (X-1)^2 \end{cases} \iff X = 1 = e^{x/2} \iff x = 0$$

- On a donc prouvé que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont **un unique point commun, et qu'il est d'abscisse 0**. On aurait pu se contenter de calculer les images par f et g de 0 pour vérifier l'assertion énoncée.
- **Équations des tangentes au point d'abscisse 0**.
  - La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est d'équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

    La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = f(x)$ soit $f(0) = f'(0) = 1$ donc sa tangente en 0 est d'équation :

$$\Delta \ : \ y = x + 1$$

  - La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est d'équation :

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

    La fonction g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = \mathrm{e}^{x/2}$ soit $g'(0) = 1 = g(0)$ donc sa tangente en 0 est aussi d'équation :

$$\Delta \ : \ y = x + 1$$

- **Concussion** : **Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et en ce point, elles ont la même tangente**

$$\boxed{\Delta \ : \ y = x + 1}$$

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{x/2} - x - 2$.

2. a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (-x-2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x/2} = 0 \end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty}$$

2. b. Justifier que, pour tout réel x, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}}{x/2} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$. En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

- Pour tout réel x **non nul** (on peut prendre cette précaution car seule la valeur en l'infini va nous intéresser) on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \ ; \ h(x) = 2\mathrm{e}^{x/2} - x - 2 = x \times \left(\frac{2\mathrm{e}^{x/2} - x - 2}{x}\right)$$

$$h(x) = x \times \left(\frac{2\mathrm{e}^{x/2}}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right)$$

  et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \ ; \ h(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{x/2} - 1 - \frac{2}{x}\right)}$$

- **Calculons la limite en $+\infty$**
  On a d'après le cours :

Propriété 5 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$
- (2) : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0$
- (3) : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = 1$

En posant $X = x/2$ on a d'après le (1) de la propriété :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{x/2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{X}}{X} = +\infty$$

donc

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{x/2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0\end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{x/2} - 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

et puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \ ; \ h(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{x/2} - 1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty}$$

2. c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

- **Calculons $h'(x)$**
  Pour tout réel x, la fonction $h \ : \ x \longmapsto h(x) = 2\mathrm{e}^{x/2} - x - 2$ est dérivable et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ h'(x) = \mathrm{e}^{x/2} - 1}$$

- **Étude du signe de la dérivée.**

  – On a pour tout réel x :

$$h'(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x/2} - 1 = 0$$
$$h'(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x/2} = 1$$

  En composant par la fonction $\ln$ définie sur $]0 \ ; \ +\infty[$, on a :

$$h'(x) > 0 \Longleftrightarrow x/2 > 0$$

  soit

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ \boxed{h'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0}$$

  – En outre pour tout réel x :

$$h'(x) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x/2} - 1 > 0$$
$$h'(x) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x/2} > 1$$

  La fonction $\ln$ étant croissante sur $]0 \ ; \ +\infty[$, on a par composition :

$$h'(x) > 0 \Longleftrightarrow x/2 > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ \boxed{h'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0}$$

En conséquence :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} h'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0 \\ h'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \ h'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 0}$$

La fonction h **est donc croissante sur** $\mathbb{R}_+$ **et décroissante sur** $\mathbb{R}_-$.

2. d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. e. En déduire que, pour tout réel x, $2e^{x/2} - 1 \geqslant x + 1$.

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = 2e^{x/2} - x - 2 \end{cases}$$

D'après le tableau de variations, le minimum de h est 0, il est atteint pour $x = 0$. De ce fait h est positive sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ h(x) \geq 0 &\iff 2e^{x/2} - x - 2 \geq 0 \\ &\iff 2e^{x/2} - x - 1 - 1 \geq 0 \\ &\iff 2e^{x/2} - 1 \geq x + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ 2e^{x/2} - 1 \geq x + 1}$$

2. f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?
L'inéquation précédente montre que donc que la courbe $\mathscr{C}_g$ est toujours au-dessus de sa tangente Δ.

3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

3. a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{x/2} - 1\right)^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \boxed{\left(e^{x/2} - 1\right)^2 = e^x - 2e^{x/2} + 1}$$

3. b. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et suffit de déterminer le signe de $f(x) - g(x)$.
On rappelle que f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{x/2} - 1$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) - g(x) &= e^x - \left(2e^{x/2} - 1\right) \\ &= e^x - 2e^{x/2} + 1 \end{aligned}$$

d'après la question **3.a.** on peut factoriser l'expression précédente :

$$f(x) - g(x) = \left(e^{x/2} - 1\right)^2 \geq 0$$

Donc pour tous les réels x, $f(x) - g(x) \geq 0$ ce qui prouve que $\mathscr{C}_f$ **est toujours au dessus de** $\mathscr{C}_g$.

4. Calculer l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
Puisque d'après la question **3.b.**, $f(x) - g(x) \geq 0$ pour tous les réels x, c'est a fortiori le cas sur l'intervalle [0 ; 1].
L'aire cherchée, exprimée en unités d'aire, est alors donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e^x - 2e^{x/2} + 1\right) \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \left[e^x - \frac{2}{1/2} e^{x/2} + x\right]_0^1 = e - 4\,e^{1/2} + 1 - \left(e^0 - 4\,e^0\right)$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \left(e - 4e^{1/2} + 4\right)\ \text{u.a.}}$$