Baccalauréat S Antilles-Guyane 11 septembre 2014

Corrigé

EXERCICE 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

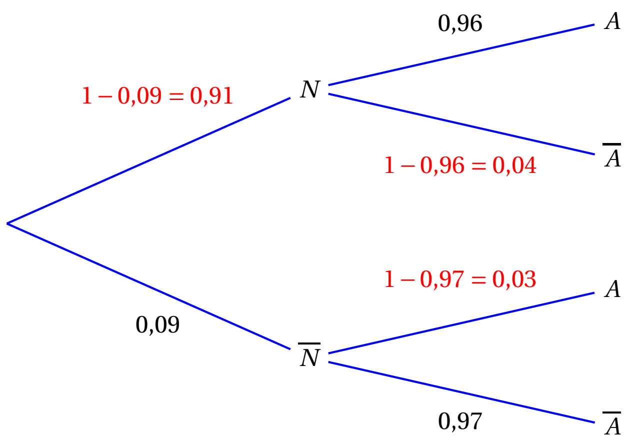
- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. On construit un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment :



2. La probabilité qu'une peluche soit acceptée est $P(A)$.
D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(N \cap A) = P(N) \times P_N(A) = 0{,}91 \times 0{,}96 = 0{,}8736 \\ P\left(\overline{N} \cap A\right) = P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) = 0{,}09 \times 0{,}03 = 0{,}0027 \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A) = 0{,}8736 + 0{,}0027 = 0{,}8763$$

3. La probabilité qu'une peluche qui a été acceptée soit aux normes est $P_A(N)$:

$$P_A(N) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}8736}{0{,}8763} \approx 0{,}9969$$

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur. On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0{,}5$.

Si D suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(D \leqslant a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

Donc $P(D \leqslant 4) = 0{,}5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-4\lambda} = 0{,}5 \iff 0{,}5 = \mathrm{e}^{-4\lambda} \iff \ln 0{,}5 = -4\lambda \iff \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}5}{4}$

2. On prendra ici $\lambda = 0{,}1733$.

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

La probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires est la probabilité conditionnelle $P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3+5)$.

On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs s et t : $P_{D\geqslant t}(D \geqslant s+t) = P(D \geqslant s)$.

Donc $P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3+5) = P(D \geqslant 5) = 1 - P(D \leqslant 5) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-5\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-5\times 0{,}1733} \approx 0{,}4204$

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. D'après le cours, la variable aléatoire $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1.

2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0{,}975$.

$J \leqslant 385 \iff J - 358 \leqslant 27 \iff \dfrac{J-358}{\sigma} \leqslant \dfrac{27}{\sigma}$ car σ est un nombre strictement positif.

On cherche donc σ pour que $P\left(X \leqslant \dfrac{27}{\sigma}\right) \leqslant 0{,}975$ sachant que X suit la loi normale centrée réduite.

La calculatrice donne $\dfrac{27}{\sigma} \approx 1{,}96$ ce qui équivaut à $\sigma \approx 13{,}77$. On prendra donc $\sigma = 14$.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$; donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ ce qui équivaut à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$ et :

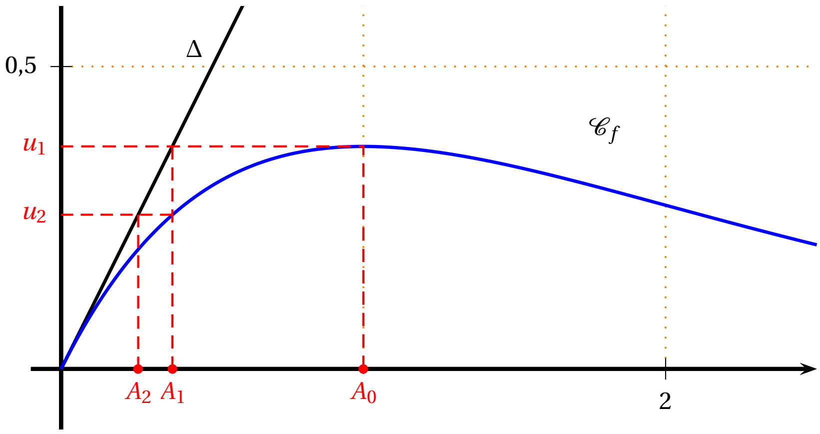
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x(-1 \times \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$; $f(0) = 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$

D'où le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			e^{-1}		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On place sur le graphique, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n > 0$.
   - $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p > 0$.
     Pour tout réel x, $\text{e}^{-x} > 0$ donc pour tout réel $x > 0$, $x\text{e}^{-x} > 0$ donc $f(x) > 0$.
     Or $u_{p+1} = f(u_p)$ et $u_p > 0$ (hypothèse de récurrence) ; donc $f(u_p) > 0$ et donc $u_{p+1} > 0$.
     La propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vérifiée au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Pour tout réel $x > 0$:
   $$\begin{aligned} -x < 0 &\iff \text{e}^{-x} < \text{e}^{0} && \text{croissance de la fonction exponentielle}\\ &\iff \text{e}^{-x} < 1 \\ &\iff x\text{e}^{-x} < x && \text{car } x > 0\\ &\iff f(x) < x \end{aligned}$$
   Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) < x$; or, pour tout n, $u_n > 0$ donc $f(u_n) < u_n$ ce qui veut dire que $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
4. **a.** La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

   b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\text{e}^{-x} = x$.
   On résout l'équation $x\text{e}^{-x} = x$:
   $$\begin{aligned} x\text{e}^{-x} = x &\iff x\left(\text{e}^{-x} - 1\right) = 0 &&\iff x = 0 \text{ ou } \text{e}^{-x} - 1 = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } \text{e}^{-x} = 1 &&\iff x = 0 \text{ ou } -x = 0 \end{aligned}$$
   Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 0.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

L'algorithme suivant donne S_{100} :

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels
	k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur 1
	S prend la valeur u
Traitement :	Pour k variant de 1 à 100
	u prend la valeur $u \times \mathrm{e}^{-u}$
	S prend la valeur $S + u$
	Fin Pour
	Afficher S

EXERCICE 3 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit (E_1) l'équation : $\mathrm{e}^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. $$\mathrm{e}^x - x^n = 0 \iff \mathrm{e}^x = x^n \iff \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = \ln\left(x^n\right) \iff x = n\ln(x) \iff \frac{x}{n} = \ln(x) \iff \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$$

Donc les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes.

2. L'équation (E_1) admet deux solutions si et seulement si l'équation (E_2) admet deux solutions.

Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$; résoudre l'équation (E_2) revient donc à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Cherchons les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{n} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}$$

$f(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$ peut s'écrire $x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{n}\right)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} < 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n}\right) = -\infty} \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

La fonction f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-x}{nx}$.

$f'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = n$ et $f(n) = \ln(n) - \dfrac{n}{n} = \ln(n) - 1$.

D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0		n		$+\infty$
$n-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(n)-1$	$\searrow$	$-\infty$

D'après ce tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $]0\,;+\infty[$ si et seulement si le maximum de la fonction f est strictement positif, c'est-à-dire quand $\ln(n) - 1 > 0$:

$\ln(n)-1>0 \iff \ln(n)>1 \iff n>\text{e} \iff n\geqslant 3$

Donc on peut dire que l'équation (E_1) admet deux solutions si et seulement si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

EXERCICE 4 — 5 points

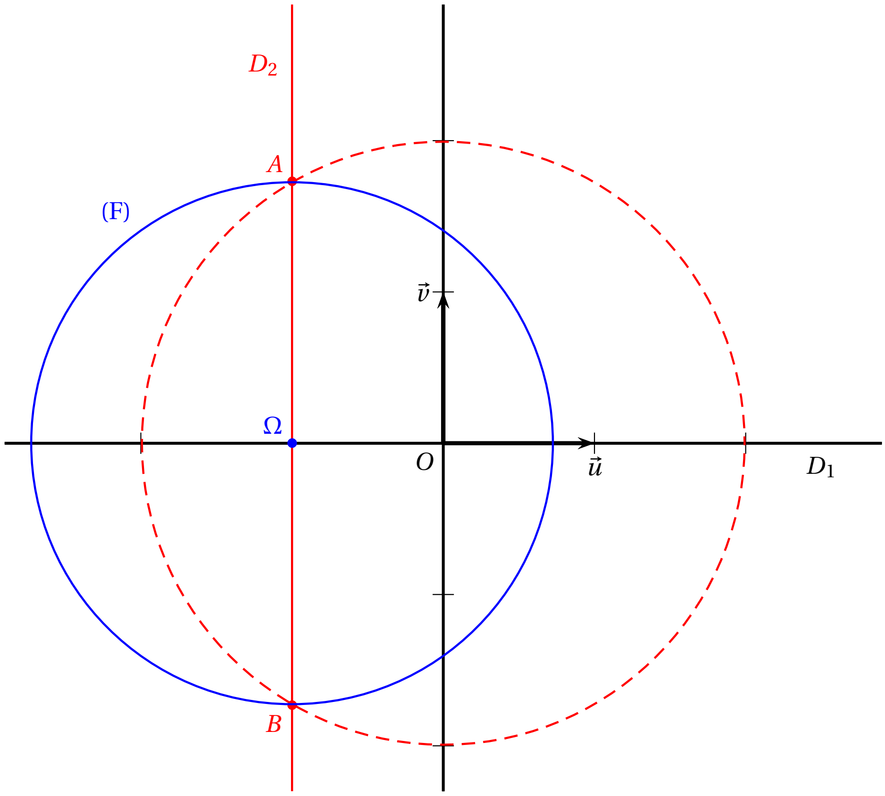
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z)=z^2+2z+9$.

1. $f\left(-1+\text{i}\sqrt{3}\right)=\left(-1+\text{i}\sqrt{3}\right)^2+2\left(-1+\text{i}\sqrt{3}\right)+9=1-2\text{i}\sqrt{3}-3-2+2\text{i}\sqrt{3}+9=5$
2. On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=5$:
   $f(z)=5 \iff z^2+2z+9=5 \iff z^2+2z+4=0\,;\ \Delta=4-16=-12=-\left(2\sqrt{3}\right)^2$
   Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-2+2\text{i}\sqrt{3}}{2}=-1+\text{i}\sqrt{3}$ et $-1-\text{i}\sqrt{3}$
   On appelle A le point d'affixe $z_A=-1+\text{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B=-1-\text{i}\sqrt{3}$
   $|z_A|=\sqrt{1+3}=2$
   Soit θ_A un argument de z_A : $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_A=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow \theta_A=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$
   Donc $z_A=2\,\text{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$
   Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B=2\,\text{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}$
   $|z_A|=2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x=-1$. Idem pour B.
   Voir graphique page 6.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.
   $f(z)=\lambda \iff z^2+2z+9=\lambda \iff z^2+2z+9-\lambda=0$
   Pour que l'équation $f(z)=\lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2+2z+9-\lambda$ soit strictement négatif.
   $\Delta=4-4(9-\lambda)=4-36+4\lambda=4\lambda-32\,;\ \Delta<0 \iff 4\lambda-32<0 \iff \lambda<8$
   L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $]-\infty\,;8[$.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left|f(z)-8\right|=3$
   $f(z)-8=z^2+2z+9-8=z^2+2z+1=(z+1)^2$; donc $\left|f(z)-8\right|=\left|(z+1)^2\right|=|z+1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.
   Donc $\left|f(z)-8\right|=3 \iff |z+1|^2=3 \iff |z+1|=\sqrt{3}$
   Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1\,;0)$; si on appelle M le point d'affixe z, alors $|z+1|=\sqrt{3} \iff |z_M-z_\Omega|=\sqrt{3}$.
   L'ensemble des points M vérifiant $|z_M-z_\Omega|=\sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.
   On trace (F) sur le graphique (voir page 6).
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+\text{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. $f(z)=z^2+2z+9=(x+\text{i}y)^2+2(x+\text{i}y)+9=x^2+2\text{i}xy-y^2+2x+2\text{i}y+9$
   $=x^2-y^2+2x+9+\text{i}(2xy+2y)$
   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   $f(z)$ réel $\iff 2xy+2y=0 \iff 2y(x+1)=0 \iff y=0$ ou $x=-1$
   Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x=-1$.

Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\left(-1-\sqrt{3}\,;0\right)$ et $\left(-1+\sqrt{3}\,;0\right)$.
Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1 ; donc A et B sont situés sur la droite D_2.
$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}+1\right| = \left|\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point A appartient au cercle (F).
$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = \left|-1-\mathrm{i}\sqrt{3}+1\right| = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point B appartient au cercle (F).
Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :
$\left(-1-\sqrt{3}\,;0\right)$, $\left(-1+\sqrt{3}\,;0\right)$, $\left(-1\,;\sqrt{3}\right)$ et $\left(-1\,;-\sqrt{3}\right)$



EXERCICE 4 — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi la spécialité

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.
D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement.
De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1[er] janvier de l'année $2014+n$, exprimées en millions d'euros.
On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On suppose que le 1[er] janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.
L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation $U_{n+1} = AU_n + B$, où $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $U_{n+1} = AU_n + B \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}15y_n + 1 \\ y_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4y_n + 3 \end{array} \right.$

Le coefficient 0,6 de la matrice A correspond au pourcentage de la somme qui reste d'une année sur l'autre à l'agence X.

Le coefficient 3 de la matrice B correspond à la somme (en millions d'euros) qui est rajoutée chaque année à l'agence Y.

2. D'après le texte, $U_0 = \begin{pmatrix}50\\10\end{pmatrix}$

La quantité de fonds dans chaque agence en 2015 est donnée par la matrice $U_1 = AU_0 + B$:

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}15\\0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}50\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6\times 50+0{,}15\times 10+1\\0{,}2\times 50+0{,}4\times 10+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32{,}5\\17\end{pmatrix}$

En 2015, il y a donc 32,5 millions d'euros dans l'agence X et 17 millions d'euros dans l'agence Y.

3. On note $D = \begin{pmatrix}0{,}3 & 0\\0 & 0{,}7\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 2\end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix}0{,}25 & -0{,}375\\0{,}25 & 0{,}125\end{pmatrix}$.

a. À la calculatrice, on trouve que $PDQ = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}15\\0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}$ donc que $PDQ = A$.

b. $QP = \begin{pmatrix}0{,}25 & -0{,}375\\0{,}25 & 0{,}125\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 2\end{pmatrix}$

Le coefficient situé sur la première ligne et la deuxième colonne de la matrice QP est donc :

$0{,}25\times 3 + (-0{,}375)\times 2 = 0{,}75 - 0{,}75 = 0$

Dans la suite, on admettra que $QP = I$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

Ce résultat est assez facile à démontrer par récurrence en considérant les résultats des questions précédentes ; l'hérédité se démontre ainsi : $A^{p+1} = A\times A^p = PDQ\times PD^pQ = PDD^pQ = PD^{p+1}Q$ *car* $Q\times P = I$.

4. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix}$; donc $U_n = V_n + \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix}$

a. $V_{n+1} = U_{n+1} - \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix} = AU_n + B - \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix} = A\left(V_n + \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix}$

$= AV_n + \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}15\\0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix} = AV_n + \begin{pmatrix}0{,}6\times 5+0{,}15\times\frac{20}{3}+1-5\\0{,}2\times 5+0{,}4\times\frac{20}{3}+3-\frac{20}{3}\end{pmatrix} = AV_n + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$= AV_n$

b. $V_0 = U_0 - \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}50\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}$

On peut dire que, pour tout n, $V_n = A^n \times V_0$.

On peut considérer ce résultat comme « classique » ; en cas de doute, on peut le démontrer par récurrence en se rappelant que $A^0 = I$.

5. Soit n un entier naturel. On admet que $A^n = \begin{pmatrix}0{,}25\times 0{,}3^n + 0{,}75\times 0{,}7^n & 0{,}375\,(-0{,}3^n + 0{,}7^n)\\0{,}5\,(-0{,}3^n+0{,}7^n) & 0{,}75\times 0{,}3^n + 0{,}25\times 0{,}7^n\end{pmatrix}$

a. D'après les questions précédentes, $V_n = A^n \times V_0$ donc le coefficient de la première ligne de V_n est :

$(0{,}25\times 0{,}3^n + 0{,}75\times 0{,}7^n)\times 45 + (0{,}375\,(-0{,}3^n+0{,}7^n))\times\dfrac{10}{3}$

$= 11{,}25\times 0{,}3^n + 33{,}75\times 0{,}7^n + 1{,}25\,(-0{,}3^n + 0{,}7^n)$

$= 11{,}25\times 0{,}3^n + 33{,}75\times 0{,}7^n - 1{,}25\times 0{,}3^n + 1{,}25\times 0{,}7^n$

$= 10\times 0{,}3^n + 35\times 0{,}7^n$

b. $U_n = V_n + \begin{pmatrix}5\\\frac{20}{3}\end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ Donc $x_n = 10\times 0{,}3^n + 35\times 0{,}7^n + 5$

c. La suite $(0{,}3^n)$ est une suite géométrique de raison 0,3 ; or $-1 < 0{,}3 < 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}3^n = 0$.

Pour la même raison, on peut dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}7^n = 0$.

D'après les théorèmes sur les limites de suites, on peut déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = 5$.

Cela signifie que la quantité de fonds disponibles dans l'agence X va tendre vers 5 millions d'euros.