Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S Antilles-Guyane

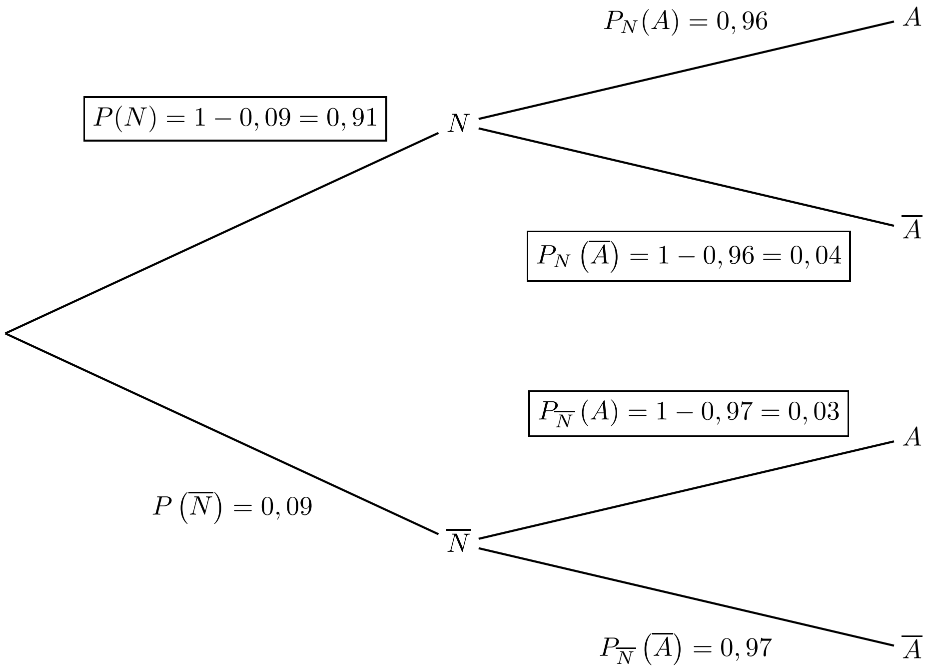
Série S Obli. et Spé.
Jeudi 11 septembre 2014
Correction

Ceci est la correction du sujet de la session de septembre du **Bac S d'Antilles-Guyane**, session dite de **remplacement**.

Exercice 1. Probabilités — 6 points

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.



2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.

La probabilité qu'une peluche soit acceptée est $P(A)$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A)$$

Donc

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) \\ P(A) &= 0,91 \times 0,96 + 0,09 \times 0,03 \\ P(A) &= 0{,}873\,6 + 0{,}002\,7 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = 0{,}876\,3}$$

La probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est de **0,876 3**.

3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

La probabilité qu'une peluche qui a été acceptée soit aux normes est $P_A(N)$:

$$\boxed{P_A(N) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}873\,6}{0{,}876\,3} \approx 0{,}996\,9}$$

La probabilité qu'une peluche qui a été acceptée soit véritablement aux normes est de **0,996 9**, arrondie aux dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur. On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
L'égalité $P(D \leqslant 4) = 0,5$ traduit le fait que la probabilité que la peluche soit conforme pendant 4 ans ou moins est de $0,5$.

Calculer la valeur exacte de λ.
Si D suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors

$$P(D \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

Donc

$$P(D \leq 4) = 0,5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-4\lambda} = 0,5 \iff 0,5 = \mathrm{e}^{-4\lambda} \iff \ln 0,5 = -4\lambda \iff \lambda = -\frac{\ln 0,5}{4}$$

soit

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln 0,5}{4}}$$

2. On prendra ici $\lambda = 0{,}173\,3$. Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa s ?ur qui vient de naître. Calculer la probabilité pour que sa soeur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.
La probabilité pour que sa soeur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires est la probabilité conditionnelle $P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3+5)$.
On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » c'est à dire que :

> **Propriété 1** (Durée de vie sans vieillissement)
>
> Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h :
>
> $$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$
>
> Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».

Donc pour $t = 3$; $h = 5$:

$$\begin{aligned} P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3+5) &= P(D \geqslant 5) \\ &= 1 - P(D < 5) \\ &= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-5\lambda}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-5\times 0{,}173\,3} \approx 0{,}420\,4 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3+5) = P(D \geqslant 5) \approx 0{,}420\,4}$$

Partie C

Le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres $\mu = 358$ jours et σ.

1. Soit $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?

Par propriété :

Propriété 2

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque J suit la loi normale $\mathcal{N}\left(358\,;\,\sigma^2\right)$, la variable aléatoire $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la **loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1**.

2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

On a puisque σ est un nombre strictement positif :

$$J \leq 385 \iff J - 358 \leq 27 \iff \frac{J - 358}{\sigma} \leq \frac{27}{\sigma}$$

On cherche donc σ pour que

$$P\left(X \leq \frac{27}{\sigma}\right) \leq 0,975$$

Sachant que X suit la loi normale centrée réduite.
La calculatrice donne

$$\frac{27}{\sigma} \approx 1,96$$

Ce qui équivaut à $\sigma \approx 13,77$. On prendra donc arrondi à l'entier le plus proche

$$\boxed{\sigma \approx 14}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.975) \approx 1{,}959\,963\,986$$

Exercice 2. Fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Propriété 3 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$
- (2) : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0$
- (3) : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = 1$

D'après le cours, le (1) de la propriété 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$$

D'où

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

La courbe représentative de f présente donc une **asymptote horizontale**, en $+\infty$, l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\,;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;\ +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $[0\,;\ +\infty[$ et par dérivation d'un produit de fonctions dérivables :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

soit

$$\forall x \in [0\,;\ +\infty[\,;\ f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x\left(-1 \times \mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\ +\infty[\,;\ f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}}$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$, soit nulle en 1 et positive avant 1. De plus

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0,37$$

D'où le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\ +\infty[$:

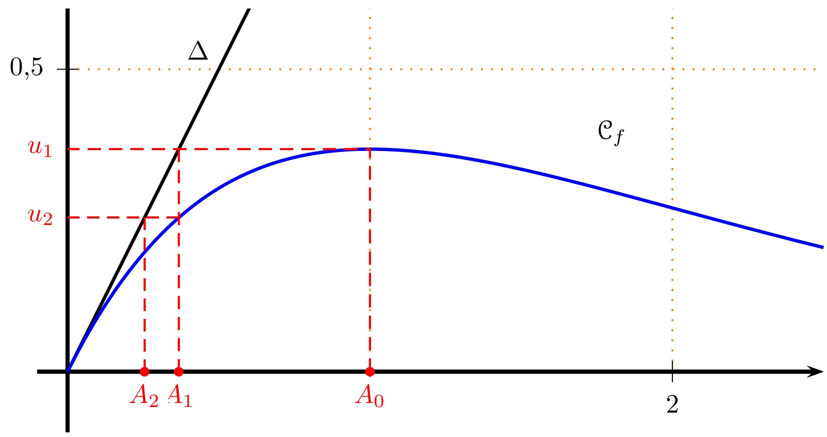
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique, en utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ, les points $A_0,\ A_1$ et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives $u_0,\ u_1$ et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.



2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n,\ u_n > 0$.

Soit pour n entier naturel, $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n > 0$.

- **Initialisation**.
  $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**.
  On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire que $u_p > 0$ pour p entier naturel fixé.
  Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc pour tout réel $x > 0$, $x\,\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc
  $$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\ ;\ f(x) > 0$$
  Or
  $$u_{p+1} = f(u_p) \text{ et } u_p > 0 \text{ (hypothèse de récurrence)}$$
  donc
  $$f(u_p) = u_{p+1} > 0$$
  La propriété est vraie au rang $p+1$.
- **Conclusion**.
  La propriété est vérifiée au rang 0, et elle est héréditaire pour tout entier $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n > 0}$$

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}
-x < 0 &\iff \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{0} && \text{: Par croissance de la fonction exponentielle}\\
&\iff \mathrm{e}^{-x} < 1 &&\\
&\iff x\,\mathrm{e}^{-x} < x && \text{: En multipliant les deux membres par } x \text{ strictement positif}\\
&\iff f(x) < x &&
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0\,;\,+\infty[\ ;\ f(x) < x$$

Or pour tout entier n, $u_n > 0$ d'après la question précédente donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ f(u_n) = u_{n+1} < u_n$$

La suite **(u_n) est donc décroissante**.

4. **4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.**
La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc, d'après le *théorème de la convergence monotone*, **la suite (u_n) est convergente**.

4. b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $xe^{-x} = x$. Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.
On résout l'équation $x\,\mathrm{e}^{-x} = x$ sur $\mathbb{R}_+ = [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{e}^{-x} = x &\iff x\,(\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 &&\iff x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 1 &&\iff x = 0 \text{ ou } -x = 0 \end{aligned}$$

Donc **la limite de la suite (u_n) est égale à 0**.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il calcule S_{100}

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels
	k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur $\boxed{1}$
	S prend la valeur $\boxed{u}$
Traitement :	Pour k variant de 1 à $\boxed{100}$
	u prend la valeur $u \times \mathrm{e}^{-u}$
	S prend la valeur $\boxed{S + u}$
	Fin Pour
	Afficher $\boxed{S}$

Exercice 3. Équations — 3 points

Commun à tous les candidats

On considère l'équation (E_1), où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

$$(E_1)\ :\ \mathrm{e}^x - x^n = 0$$

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$.

$$\begin{aligned}(E_1)\ :\ \mathrm{e}^{\,x} - x^n = 0 &\iff \mathrm{e}^{\,x} = x^n\\ &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{\,x}\right) = \ln\left(x^n\right)\\ &\iff x = n\ln(x)\\ (E_1)\ :\ \mathrm{e}^{\,x} - x^n = 0 &\iff \frac{x}{n} = \ln(x)\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{(E_1)\ :\ \mathrm{e}^{\,x} - x^n = 0 \iff (E_2)\ :\ \ln(x) - \frac{x}{n} = 0}$$

Les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes.

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

D'après la question précédente, l'équation (E_1) admet deux solutions si et seulement si l'équation (E_2) admet deux solutions.

- **Introduction d'une fonction auxiliaire f.**
  Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$, avec n entier naturel non nul, par

  $$\forall x \in I\ ;\ f(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$$

  Résoudre l'équation (E_2) revient donc à résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- **Résolution de l'équation $f(x) = 0$.**
  On va déterminer les variations de f puis chercher à appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
  - **Étude des variations de la fonction f.**
    La fonction f est dérivable sur I avec

    $$\forall x \in I\ ;\ f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} = \frac{n-x}{nx}$$

    Or x et n sont positifs strictement sur I, donc $f'(x)$ est du signe de $(n - x)$ et s'annule et change de signe pour $x = n$. On a

    $$f(n) = \ln(n) - \frac{n}{n} = \ln(n) - 1$$

    D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0		n		$+\infty$
$n-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ ?	$\nearrow$	$\ln(n)-1$	$\searrow$	?

  - **Étude des limites de la fonction f aux bornes de I.**
    Limite en 0

    $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{n} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}}$$

Limite en $+\infty$
La fonction f peut s'écrire sous la forme

$$\forall x \in I\ ;\ f(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n}\right)$$

Donc pour n entier strictement positif :

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} < 0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n}\right) = -\infty}$$

soit

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

– **Application du TVI**.
D'après le tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $]0\,;+\infty[$ si et seulement si le maximum de la fonction f est strictement positif, c'est-à-dire quand $\ln(n) - 1 > 0$:

$$\ln(n) - 1 > 0 \iff \ln(n) > 1 \iff n > \mathrm{e} \iff n \geqslant 3$$

On peut alors compléter le tableau de variations de f sur I.

x	0	β	n	α	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\ln n - 1 > 0$	↘ 0	↘ $-\infty$

En effet dans ce cas :

Théorème 1 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet <u>une unique solution</u> dans $[a\ ;\ b]$.

Sur l'intervalle $]0\ ;\ n]$:

* La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $]0\ ;\ n]$;
* L'image par f de l'intervalle $]0\ ;\ n]$ est $]-\infty\ ;\ \ln n - 1]$ d'après le tableau de variations.
* Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car $\ln n - 1 > 0$

  Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle $]0\ ;\ n]$.

De même sur l'intervalle $[n\ ;\ +\infty[$:

* La fonction f est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle $[0\ ;\ x_1]$;
* L'image par f de l'intervalle $[n\ ;\ +\infty[$ est $[\ln n - 1\ ;\ -\infty[$ d'après le tableau de variations.
* Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car $\ln n - 1 > 0$

  Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[n\ ;\ +\infty[$.

Pour conclure : <u>l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans I</u>.

Donc on peut dire que **l'équation (E_1) admet deux solutions si et seulement si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.**

Exercice 4. Non Spécialité : Complexes — 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.

$$\begin{aligned}
f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) &= \left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) + 9\\
f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) &= 1 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 - 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} + 9\\
f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) &= 5
\end{aligned}$$

Donc l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f est 5.

$$\boxed{f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 5}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$. Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation. Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation.

- **Résolution de l'équation :**

$$f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0$$

L'équation est ramené est une équation polynôme du second degré de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ avec : } a = 1\ ;\ b = 2\ ;\ c = 4.$$

Le discriminant $\Delta = -12 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$ donc l'équation admet deux solutions imaginaires conjuguées.

$$z_1 = \frac{-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} \Longrightarrow \boxed{\mathscr{S} = \left\{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ -1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}}$$

- **Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.**
On appelle A le point d'affixe $z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et B celui d'affixe $z_B = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

$$|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$$

Soit θ_A un argument de z_A : $\left|\begin{aligned}\cos\theta_A &= -\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta_A = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc

$$\boxed{z_A = 2\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}}$$

Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés d'où

$$\boxed{z_B = 2\,\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}}$$

- **Construction**.
  - Les complexes z_A et z_B sont de modules 2
  $$|z_A| = 2 = |z_B|$$
  Donc les points A et B se trouvent sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.
  - De plus la partie réelle des points A et B vaut -1 donc les deux points appartiennent aussi à la droite (d) d'équation $x = -1$.
  - Les points **A et B sont donc les deux points d'intersection de la droite (d) et du cercle** $\mathscr{C}$. c.f. p 11

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z. Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}\,;\; f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$$

Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.

$$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32$$

$$\Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle

$$\boxed{]-\infty\,;8[}$$

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$.
Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Tracer (F) sur le graphique.

On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}\,;\; f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$$

Donc

$$|f(z) - 8| = \left|(z+1)^2\right| = |z+1|^2$$

Or le module d'un carré est égal au carré du module. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}\,;\; |f(z) - 8| = 3 \iff |z+1|^2 = 3 \iff |z+1| = \sqrt{3}$$

Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1\,;\,0)$; si on appelle M le point d'affixe z, alors

$$|z+1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$$

L'ensemble des points M vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est **le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$**.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

5. a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y)$

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}\,;\; f(z) &= z^2 + 2z + 9 \\ &= (x + \mathrm{i}\,y)^2 + 2(x + \mathrm{i}\,y) + 9 \\ f(z) &= x^2 + 2\,\mathrm{i}\,xy - y^2 + 2x + 2\,\mathrm{i}\,y + 9\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}\,;\; f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y)}$$

5. b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel. Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Pour tout complexe z :

$$f(z) \text{ réel} \iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = -1$$

Donc **(E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.**

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées

$$\left(-1 - \sqrt{3}\,;\,0\right) \text{ et } \left(-1 + \sqrt{3}\,;\,0\right).$$

Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1 ; donc A et B sont situés sur la droite D_2.

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|-1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3} + 1\right| = \left|\mathrm{i}\,\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$$

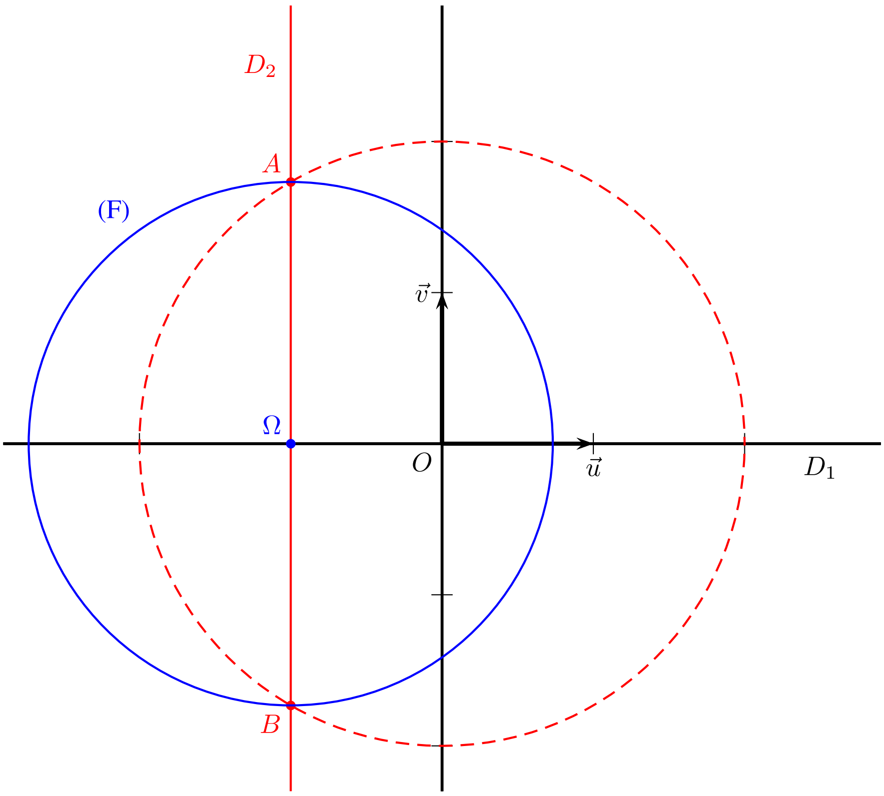
Donc le point A appartient au cercle (F).

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = \left|-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} + 1\right| = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$$

Donc le point B appartient au cercle (F).

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :

$$\boxed{\left(-1-\sqrt{3}\,;\,0\right),\ \left(-1+\sqrt{3}\,;\,0\right),\ \left(-1\,;\,\sqrt{3}\right)\text{ et }\left(-1\,;\,-\sqrt{3}\right)}$$



Exercice 4. Spécialité : Graphe et matrices — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi la spécialité

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le 1er janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.
L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = AU_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.

Pour tout entier n on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \,;\, U_{n+1} = AU_n + B \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,15y_n + 1 \\ y_{n+1} = 0,2x_n + 0,4y_n + 3 \end{cases}$$

- Le **coefficient $0,6 = 60\%$** de A correspond au **pourcentage de ce qui reste d'une année sur l'autre à l'agence X**.
- Le **coefficient 3** de B correspond à **la somme (en millions d'euros) qui est rajoutée chaque année à l'agence Y**.

2. Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.

D'après le texte,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

La quantité de fonds dans chaque agence en 2015 est donnée par la matrice $U_1 = AU_0 + B$ soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \times 50 + 0,15 \times 10 + 1 \\ 0,2 \times 50 + 0,4 \times 10 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

En 2015, il y a donc **32, 5 millions d'euros dans l'agence X et 17 millions d'euros dans l'agence Y**.

3. On note $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.

3. a. Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ.

A la calculatrice, on trouve que

$$PDQ = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{PDQ = A}$$

3. b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel QP.

$$QP = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \times 1 + (-0,375) \times (-2) & \boxed{0,25 \times 3 + (-0,375) \times 2} \\ 0,25 \times 1 + 0,125 \times (-2) & 0,25 \times 3 + 0,125 \times 2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient situé sur la première ligne et la deuxième colonne de la matrice QP est donc :

$$0,25 \times 3 + (-0,375) \times 2 = 0,75 - 0,75 = 0$$

Dans la suite, on admettra que $QP = I$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

4. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$; donc $U_n = V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\,;\; V_{n+1} &= U_{n+1} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \\
V_{n+1} &= AU_n + B - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \\
&= A\left(V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \\
&= AV_n + \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \\
&= AV_n + \begin{pmatrix} 0,6 \times 5 + 0,15 \times \frac{20}{3} + 1 - 5 \\ 0,2 \times 5 + 0,4 \times \frac{20}{3} + 3 - \frac{20}{3} \end{pmatrix} \\
V_{n+1} &= AV_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; V_{n+1} = AV_n}$$

4. b. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.

$$V_0 = U_0 - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

On peut écrire en appliquant les résultats du cours que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; V_n = A^n \times V_0}$$

5. Soit n un entier naturel. On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375\,(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5\,(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}$

5. a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.

D'après les questions précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; V_n = A^n \times V_0 = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Donc le coefficient α_n de la première ligne de V_n est :

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n) \times 45 + (0,375\,(-0,3^n + 0,7^n)) \times \frac{10}{3} \\
\alpha_n &= 11,25 \times 0,3^n + 33,75 \times 0,7^n + 1,25\,(-0,3^n + 0,7^n) \\
\alpha_n &= 11,25 \times 0,3^n + 33,75 \times 0,7^n - 1,25 \times 0,3^n + 1,25 \times 0,7^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha_n = 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n}$$

5. b. En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; U_n = V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

et donc en appliquant les résultats précédents

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; x_n = 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n + 5}$$

5. c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

Par théorème

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < 0,7 < 1$ et $-1 < 0,3 < 1$ donc d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} 10 \times (0,3)^n = 0 = \lim_{n \to +\infty} 35 \times (0,7)^n$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (x_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 5}$$

Cela signifie que **la quantité de fonds disponibles dans l'agence X va tendre vers 5 millions d'euros.**