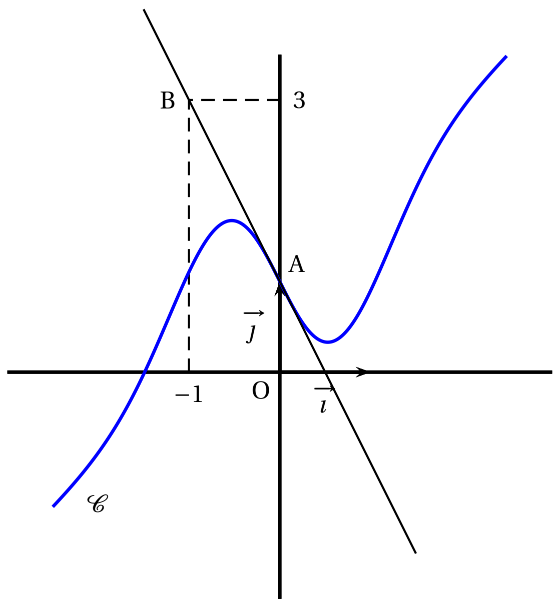
# Baccalauréat S Métropole 11 septembre 2014

# Corrigé

## Exercice 1 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(-1\,;\,3)$.




On désigne par $f$ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel $a$ tel que pour tout réel $x$, $f(x) = x + 1 + ax\text{e}^{-x^2}$.

1. **a.** Le point A a pour abscisse 0 ; $f(0) = 1$ donc $\mathscr{C}$ passe par le point A $(0\,;\,1)$.

   **b.** Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_\text{B} - y_\text{A}}{x_\text{B} - x_\text{A}} = \dfrac{3-1}{-1-0} = -2$.

   **c.** D'après la formule $\left(\text{e}^{u}\right)' = u'\,\text{e}^{u}$ et la dérivée d'une somme et d'un produit :
   $f'(x) = 1 + 0 + a\,\text{e}^{-x^2} + ax(-2x)\,\text{e}^{-x^2} = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\text{e}^{-x^2}$

   **d.** On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A ; cela veut dire que le coefficient directeur de (AB) est égal au nombre dérivé de la fonction $f$ en $x_\text{A}$ soit $f'(0)$.
   On a donc $f'(0) = -2 \iff 1 - a(0-1)\,\text{e}^{0} = -2 \iff 1 + a = -2 \iff a = -3$

2. D'après la question précédente, pour tout réel $x$, $f(x) = x + 1 - 3x\text{e}^{-x^2}$ et $f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)\text{e}^{-x^2}$.

   **a.** $\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{R},\ \text{e}^{-x^2} > 0\\ \forall x \in\, ]-1\,;\,0],\ -3x \geqslant 0\end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l}\forall x \in\, ]-1\,;\,0],\ -3x\,\text{e}^{-x^2} \geqslant 0\\ \forall x \in\, ]-1\,;\,0],\ x + 1 > 0\end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \forall x \in\, ]-1\,;\,0],\ x + 1 - 3x\,\text{e}^{-x^2} > 0$

   Donc, pour tout $x$ de $]-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$.

   **b.** Si $x \leqslant -1$, alors $x^2 \geqslant 1$ donc $2x^2 \geqslant 2$, donc $2x^2 - 1 \geqslant 1$ et donc $3\left(2x^2 - 1\right) \geqslant 3$.
   Comme pour tout $x$, $\text{e}^{-x^2} > 0$, on peut dire que pour tout $x \leqslant -1$, $3\left(2x^2 - 1\right)\text{e}^{-x^2} > 0$ (par produit). Donc, pour tout $x \leqslant -1$, $f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)\text{e}^{-x^2} > 0$.

**c.** Sur $]-\infty\,;-1]$, $f'(x)>0$ donc la fonction $f$ est strictement croissante sur cet intervalle donc sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right]$.

Or $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\approx -0{,}026<0$ et $f(-1)\approx 1{,}10>0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right]$ ; on l'appelle $c$.

Or $f\left(-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}\right)\approx 0{,}017>0$ donc $c\in\left[-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}\right[$ et donc $c<-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}$.

**3.** On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

$$c\leqslant x\leqslant 0 \quad\text{et}\quad 0\leqslant y\leqslant f(x)$$

**a.** Comme $f(x)\geqslant 0$ sur $[c\,;0]$, alors $\mathscr{A}=\displaystyle\int_c^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**b.** On admet que l'intégrale $I=\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à $10^{-3}$ près.

Pour calculer la valeur exacte de $I$, il faut déterminer une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;0\right]$.

La fonction $x\longmapsto x+1$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto \dfrac{x^2}{2}+x$.

La fonction $x\longmapsto -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ (forme $u'\mathrm{e}^u$) a pour primitive la fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ donc la fonction $x\longmapsto -3x\mathrm{e}^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

La fonction $f$ a donc pour primitive la fonction $F$ définie par $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

D'après le cours : $I=F(0)-F\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{9}{8}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}\right)=\dfrac{15}{8}-\dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}$

## Exercice 2 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants.

**1.** Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients. On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ où $\lambda$ est un réel strictement positif.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

**a.** Le temps moyen d'attente est de 10 minutes donc $E(X)=10$ ; or $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ donc $\lambda=\dfrac{1}{10}=0{,}1$.

**b.** La probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes est $P(10\leqslant X\leqslant 20)$.

Comme $X$ suit la loi exponentielle de paramètre 0,1 on sait que :

$P(10\leqslant X\leqslant 20)=\displaystyle\int_{10}^{20} 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-0{,}1t}\right]_{10}^{20}=-\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-1}\approx 0{,}2325$

**c.** Un client attend depuis 10 minutes. La probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table est la probabilité qu'il attende au moins 15 minutes, sachant qu'il a déjà attendu 10 minutes ; c'est-à-dire : $P_{X\geqslant 10}(X\geqslant 15)$

On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs $s$ et $t$ : $P_{X\geqslant t}(X\geqslant s+t)=P(X\geqslant s)$.

On en déduit que $P_{X\geqslant 10}(X\geqslant 15)=P(X\geqslant 5)$.

On sait que, pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, $P(X\leqslant a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$ donc
$P(X\leqslant 5)=1-\mathrm{e}^{-0{,}1\times 5}=1-\mathrm{e}^{-0{,}5}$ ; $P(X\geqslant 5)=1-P(X\leqslant 5)=1-\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}5}\right)=\mathrm{e}^{-0{,}5}\approx 0{,}6065$

La probabilité cherchée est 0,6065.

**2.** Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.

On note $n$ le nombre de réservations prises par le restaurant et $Y$ la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire $Y$ suit alors une loi binomiale.

**a.** La variable aléatoire $Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p = 0,8$.

Une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ a pour espérance mathématique $np$ et pour écart type $\sqrt{np(1-p)}$.

Donc $E(Y) = n \times 0,8 = 0,8n$ et $\sigma(Y) = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}$

**b.** Dans cette question, on désigne par $Z$ une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

À la calculatrice, on trouve $p_1 = P(Z \leqslant 71) \approx 0,96$.

**c.** On admet que lorsque $n = 81$, $p_1$ est une valeur approchée à $10^{-2}$ près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'évènement $\{Z \leqslant 70\}$. Le restaurant a reçu 81 réservations.

On cherche donc la probabilité que plus de 70 clients se présentent, c'est-à-dire $P(Y > 70)$. Or $P(Y > 70) = 1 - P(Y \leqslant 70) = 1 - p_1 \approx 0,04$.

La probabilité cherchée est 0,04.

## Exercice 3 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

**1.** On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de $n$ minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

**a.** Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est multiplier par 0,8 donc $u_{n+1} = 0,8\,u_n$.

Donc la suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = 10$.

**b.** La suite $(u_n)$ es géométrique, donc pour tout $n$, $u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 0,8^n$.

**c.** La quantité de médicament est inférieure à 1 % de la quantité initiale quand $u_n < \dfrac{1}{100} \times u_0$ c'est-à-dire $u_n < 0,1$.

On résout l'inéquation :

$$\begin{array}{rll} u_n < 0,1 & \iff 10 \times 0,8^n < 0,1 & \\ & \iff 0,8^n < 0,01 & \\ & \iff \ln\left(0,8^n\right) < \ln 0,01 & \text{croissance de la fonction ln sur } ]\,0\,;\,+\infty\,[ \\ & \iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8} & \text{car } \ln 0,8 < 0 \end{array}$$

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$ donc c'est au bout de 21 minutes que la quantité de médicament dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale.

*On trouve à la calculatrice que* $u_{20} \approx 0,115 > 0,1$ *et* $u_{21} \approx 0,092 < 0,1$.

**2.** Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel $n$, on note $v_n$ la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute $n$. L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute :

```
Variables :         n est un entier naturel.
                    v est un nombre réel.
Initialisation :    Affecter à v la valeur 10.
Traitement :        Pour n allant de 1 à 15
                       | Affecter à v la valeur 0,8 × v.
                       | Si v < 5 alors affecter à v la valeur v + 4
                       | Afficher v.
                    Fin de boucle.
```

**a.** Le tableau ci-dessous donne la quantité restante de médicament minute par minute :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 10 | 8 | 6,4 | 5,12 | 8,10 | 6,48 | 5,18 | 8,15 | 6,52 | 5,21 | 8,17 | 6,54 | 5,23 | 8,18 | 6,55 | 5,24 |

**b.** Les 15 premières minutes, le patient a absorbé 10 mL au début, puis 4 mL les minutes 4, 7, 10 et 13 soit 16 mL ; ce qui fait un total de 26 mL.

**c.** On programme la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

L'algorithme suivant affiche la quantité de médicament restant dans le sang minute par minute :

```
Variables :         n est un entier naturel.
                    v est un nombre réel.
Initialisation :    Affecter à v la valeur 10.
Traitement :        Pour n allant de 1 à 30
                       | Affecter à v la valeur 0,8 × v.
                       | Si v ⩽ 6 alors affecter à v la valeur v + 2
                       | Afficher v.
                    Fin de boucle.
```

**3.** On programme la machine de façon que :

— à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,

— toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel $n$, on note $w_n$ la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de $n$ minutes.

**a.** Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL.

On peut donc dire que, pour tout $n$, $w_{n+1} = 0{,}8 w_n + 1$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, on pose $z_n = w_n - 5$, donc $w_n = z_n + 5$.

$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0{,}8 w_n + 1 - 5 = 0{,}8\,(z_n + 5) - 4 = 0{,}8\,z_n + 4 - 4 = 0{,}8\,z_n$

$z_0 = w_0 - 5$ ; or à l'instant 0, on injecte 10 mL donc $w_0 = 10$. On a donc $z_0 = 5$.

La suite $(z_n)$ est donc géométrique de premier terme $z_0 = 5$ et de raison $q = 0{,}8$.

**c.** D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout $n$ : $z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0{,}8^n$.

Or $w_n = z_n + 5$ donc, pour tout $n$, $w_n = 5 \times 0{,}8^n + 5$.

**d.** La suite $(z_n)$ est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0{,}8 < 1$ donc la suite $(w_n)$ est convergente vers 0. D'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut en déduire que la suite $(w_n)$ est convergente et a pour limite 5.

Cela veut dire que, si on poursuit ce traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient va se rapprocher de 5 mL.

## Exercice 4 5 points

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées : $\text{A}\left(1\,;\,-\sqrt{3}\,;\,0\right)$ ; $\text{B}\left(1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0\right)$ ; $\text{C}(-2\,;\,0\,;\,0)$ ; $\text{D}\left(0\,;\,0\,;\,2\sqrt{2}\right)$

**1.** Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\left(0; 2\sqrt{3}; 0\right)$ ; le vecteur $\overrightarrow{\text{AD}}$ a pour coordonnées $\left(-1; \sqrt{3}; 2\sqrt{2}\right)$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les trois points A, B, D définissent un plan.
La relation $4x + z\sqrt{2} = 4$ est de la forme $ax + by + cz = d$, c'est donc une équation d'un plan $\mathcal{P}$.

- $4x_{\text{A}} + z_{\text{A}}\sqrt{2} = 4 \times 1 = 4$ donc $\text{A} \in \mathcal{P}$
- $4x_{\text{B}} + z_{\text{B}}\sqrt{2} = 4 \times 1 = 4$ donc $\text{B} \in \mathcal{P}$
- $4x_{\text{D}} + z_{\text{D}}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ donc $\text{D} \in \mathcal{P}$

Donc $\mathcal{P}$ est le plan (ABD) qui a pour équation $4x + z\sqrt{2} = 4$.

**2.** On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{array}\right.$ , $t \in \mathbb{R}$

**a.** En prenant $t = 0$, on trouve $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ donc le point O appartient à $\mathcal{D}$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1; 0; \sqrt{2}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$ a pour coordonnées $\left(2; 0; 2\sqrt{2}\right)$ donc $\overrightarrow{\text{CD}} = 2\vec{u}$ ce qui entraîne que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à (CD).

**b.** Le point G d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD) a des coordonnées $(x; y; z)$ qui vérifient : $\left\{\begin{array}{r} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \\ 4x + z\sqrt{2} = 4 \end{array}\right.$

Donc $4t + t\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \iff 6t = 4 \iff t = \dfrac{2}{3}$. Le point G a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}; 0; \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

**3. a.** On note L le milieu du segment [AC] ;

L a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_{\text{A}} + x_{\text{C}}}{2}; \dfrac{y_{\text{A}} + y_{\text{C}}}{2}; \dfrac{z_{\text{A}} + z_{\text{C}}}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{BL}}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ ; le vecteur $\overrightarrow{\text{BO}}$ a pour coordonnées $\left(-1; -\sqrt{3}; 0\right)$.

Donc $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{BL}} = \overrightarrow{\text{BO}}$ ; les vecteurs $\overrightarrow{\text{BL}}$ et $\overrightarrow{\text{BO}}$ sont colinéaires donc les points B, O et L sont alignés.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $\left(-3; \sqrt{3}; 0\right)$.

On calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{\text{BL}}$ et de $\overrightarrow{\text{AC}}$ :

$\overrightarrow{\text{BL}}.\overrightarrow{\text{AC}} = -\dfrac{3}{2} \times (-3) + \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{3} + 0 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{2} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{BL}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux.

On peut donc dire que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

**b.** La droite (BL) passe par le milieu de [AC] et est perpendiculaire à (AC) donc c'est la médiatrice de [AC], donc BA = BC.

- $\text{BA}^2 = (x_{\text{A}} - x_{\text{B}})^2 + \left(y_{\text{A}} - y_{\text{B}}\right)^2 + (z_{\text{A}} - z_{\text{B}})^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 12$
- $\text{CA}^2 = (x_{\text{A}} - x_{\text{C}})^2 + \left(y_{\text{A}} - y_{\text{C}}\right)^2 + (z_{\text{A}} - z_{\text{Z}})^2 = (1 + 2)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 3 = 12$

Donc $\text{BA}^2 = \text{CA}^2$ donc BA = CA.

On peut en déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Donc son cercle circonscrit est aussi son centre de gravité ; il est situé aux $\dfrac{2}{3}$ d'une médiane en partant du sommet.

Or on a vu que $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{BL}} = \overrightarrow{\text{BO}}$ donc on peut en déduire que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

**4.** On a déjà vu que $\text{AB} = \text{AC} = \text{BC} = \sqrt{12}$ ; on calcule les longueurs des autres arêtes du tétraèdre :

- $\text{DA}^2 = (-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 1+3+8 = 12$
- $\text{DB}^2 = (-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 1+3+8 = 12$
- $\text{DC}^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4+8 = 12$

Donc les six arêtes du tétraèdre ABCD ont la même longueur, donc le tétraèdre ABCD est régulier.

## Exercice 4 — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

— 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte, donc il reste 80 % de souris dans le compartiment A ;

— 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte, donc il reste 90 % de souris dans le compartiment B.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0{,}5$ et $b_0 = 0{,}5$.

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on note $a_n$ et $b_n$ les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de $n$ jours, après fermeture de la porte. On désigne par $U_n$ la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

**1.** Soit $n$ un entier naturel.

**a.** Lors de la première ouverture des portes il reste dans A 80 % des souris présentes soit une proportion de $0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}40$ et il rentre 10 % de souris venant de B soit $0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}05$. Donc il y aura dans A au total $0{,}40 + 0{,}05 = 0{,}45$ comme proportion de souris.

Il en reste donc $1 - 0{,}45 = 0{,}55$ pour B. Donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.

**b.** Lors de la $n+1$-ième ouverture de porte, il restera dans A 80 % des souris présentes, soit $0{,}8\,a_n$ et il en vient 10 % de B soit $0{,}10\,b_n$ ; donc $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 0{,}1\,b_n$.

Lors de la $n+1$-ième ouverture de porte, il restera dans B 90 % des souris présentes, soit $0{,}9\,b_n$ et il en vient 20 % de A soit $0{,}20\,a_n$ ; donc $b_{n+1} = 0{,}2\,a_n + 0{,}9\,b_n$.

**c.** D'après la question précédente, $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}8\,a_n + 0{,}1\,b_n \\ 0{,}2\,a_n + 0{,}9\,b_n \end{pmatrix}$

On cherche une matrice carrée d'ordre 2 $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que $MU_n = U_{n+1}$.

$$MU_n = U_{n+1} \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha a_n + \beta b_n \\ \gamma a_n + \delta b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8\,a_n + 0{,}1\,b_n \\ 0{,}2\,a_n + 0{,}9\,b_n \end{pmatrix}$$

Donc $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

**d.** La répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours est donnée par $U_3$ ; à la calculatrice, on trouve $M^3 = \begin{pmatrix}0{,}562 & 0{,}219\\0{,}438 & 0{,}781\end{pmatrix}$

$U_3 = M^3 \times U_0 = \begin{pmatrix}0{,}562 & 0{,}219\\0{,}438 & 0{,}781\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}3905\\0{,}6095\end{pmatrix}$

La répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours est respectivement 39,05 % et 60,95 %.

**2.** Soit la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$.

**a.** $P^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1+1\times2 & 1\times1+1\times(-1)\\2\times1+(-1)\times2 & 2\times1+(-1)\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix} = 3I$

où $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 2.

Donc $\dfrac{1}{3}P^2 = I$ ce qui entraîne que $P \times \dfrac{1}{3}P = \dfrac{1}{3}P \times P = I$ ; la matrice $P$ est donc inversible et son inverse est $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$.

**b.** $P^{-1}M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}1\\0{,}2 & 0{,}9\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\times0{,}8+1\times0{,}2 & 1\times0{,}1+1\times0{,}9\\2\times0{,}8+(-1)\times0{,}2 & 2\times0{,}1+(-1)\times0{,}9\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\1{,}4 & -0{,}7\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\left(P^{-1}M\right)P &= \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\1{,}4 & -0{,}7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\times1+1\times2 & 1\times1+1\times(-1)\\1{,}4\times1+(-0{,}7)\times2 & 1{,}4\times1+(-0{,}7)\times(-1)\end{pmatrix}\\ &= \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 2{,}1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $P^{-1}MP$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}7\end{pmatrix}$ que l'on appelle $D$.

**c.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $M^n = PD^nP^{-1}$.

- $P^{-1}MP = D \Leftrightarrow PP^{-1}MP = PD \Leftrightarrow MP = PD \Leftrightarrow MPP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$
  donc la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 1.
- On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 1$, c'est-à-dire $M^p = PD^pP^{-1}$.
  D'après l'hypothèse de récurrence $M^p = PD^pP^{-1}$ et on sait que $M = PDP^{-1}$ donc :
  $M^{p+1} = M \times M^p = PDP^{-1} \times PD^pP^{-1} = PDP^{-1}PD^pP^{-1} = PDD^pP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$
  donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 1 ; elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 1$ donc la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $M^n = \begin{pmatrix}\dfrac{1+2\times0{,}7^n}{3} & \dfrac{1-0{,}7^n}{3}\\[2mm] \dfrac{2-2\times0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7^n}{3}\end{pmatrix}$

**3.** Pour avoir la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage, il faut chercher $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.

$$U_n = M^nU_0 = \begin{pmatrix}\dfrac{1+2\times0{,}7^n}{3} & \dfrac{1-0{,}7^n}{3}\\[2mm] \dfrac{2-2\times0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7^n}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\[2mm]\dfrac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1+2\times0{,}7^n+1-0{,}7^n}{6}\\[2mm] \dfrac{2-2\times0{,}7^n+2+0{,}7^n}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{2+0{,}7^n}{6}\\[2mm]\dfrac{4-0{,}7^n}{6}\end{pmatrix}$$

La suite $\left(0{,}7^n\right)$ est géométrique de raison 0,7 ; or $-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2+0{,}7^n = 2$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4-0{,}7^n = 4$ ; et donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix}\dfrac{2}{6}\\[2mm]\dfrac{4}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\\[2mm]\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$

On en conclut que la répartition à long terme des souris dans les compartiments est de $\dfrac{1}{3}$ pour le compartiment A et de $\dfrac{2}{3}$ pour le compartiment B.