Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S Métropole

Série S Obli. et Spé.
Jeudi 11 septembre 2014
Correction

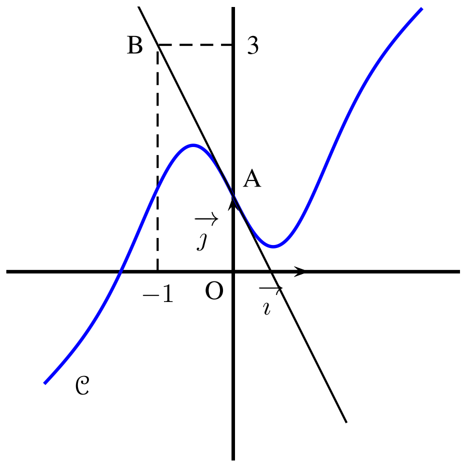
Ce sujet est celui de la session de septembre de Métropole, dite de remplacement.

Exercice 1. Fonctions — 5 points

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;1)$ et $(-1\,;\,3)$. On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + ax\mathrm{e}^{-x^2}.$$



1. 1. a. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.
Le point A est de coordonnées $(0\,;1)$ et $f(0) = 1$ donc $\mathcal{C}$ passe par le point A $(0\,;1)$.

1. b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$\frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} = \frac{3-1}{-1-0} = -2$$

1. c. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\; f'(x) = (x+1)' + \left(ax\mathrm{e}^{-x^2}\right)'$$
$$f'(x) = 1 + \left(ax\mathrm{e}^{-x^2}\right)'$$

Or par dérivation du produit : $(uv)' = u'v + uv'$; u et v dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\; f'(x) = 1 + (ax)'\,\mathrm{e}^{-x^2} + ax\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)'$$

Et par dérivation de la fonction exponentielle composée : $(e^u)' = u'e^u$; u dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\; f'(x) = 1 + a\,\mathrm{e}^{-x^2} + ax(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$$
$$f'(x) = 1 + a\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2ax^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,;\; f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\,\mathrm{e}^{-x^2}}$$

1. d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A. Déterminer la valeur du réel a.

La droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(0\,;\,1)$ donc le coefficient directeur de la droite (AB), soit -2, déterminé lors de la question **1b.** , est égal au nombre dérivé de la fonction f en x_A soit $f'(0)$. De ce fait puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$$

alors

$$f'(0) = -2 \iff 1 - a(0-1)\,\mathrm{e}^{0} = -2 \iff 1 + a = -2 \iff \boxed{a = -3}$$

2. D'après la question précédente, pour tout réel x, $f(x) = x + 1 - 3x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$.

2. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x^2} > 0\\ \forall x \in]-1\,;\,0],\ -3x \geqslant 0\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\forall x \in]-1\,;\,0],\ -3x\,\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant 0}\\ \forall x \in]-1\,;\,0],\ x + 1 > 0\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\forall x \in]-1\,;\,0],\ x + 1 - 3x\,\mathrm{e}^{-x^2} > 0}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1\,;\,0]\,;\ f(x) > 0}$$

2. b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

L'étude du signe du binôme du second degré $x \mapsto 3\left(2x^2 - 1\right)$ est aisé, les racines sont trivialement $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'où

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
signe de $3\left(2x^2 - 1\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc pour tout réel x inférieur ou égal à $-1 < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ on a $3\left(2x^2 - 1\right) > 0$.

Le signe de f' sur $]-\infty\,;\,-1]$ s'obtient donc facilement :

$$\left.\begin{array}{r}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x^2} > 0\\ \forall x \in]-\infty\,;\,-1],\ 3\left(2x^2 - 1\right) > 0\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\forall x \in]-\infty\,;\,-1],\ 3\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2} > 0}$$

Et donc

$$\boxed{\forall x \in]-\infty\,;\,-1],\ f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2} > 1 > 0}$$

2. c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

> **Théorème 1** (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)
>
> Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

D'après la question **2b.**, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$ donc à fortiori sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right]$, donc :

- La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right]$;
- L'image par f de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right]$ est $\left[f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\,;\,f(-1)\right]$ puisque f est croissante ;

- Le réel $k=0$ appartient à l'intervalle image car $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\approx -0,026<0$ et $f(-1)\approx 1,10>0$

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x)=k=0$ admet une solution unique notée c sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right]$

Justifier que $c<-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}$.

On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} f\left(-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}\right) & \approx & 0,017>0 \\ f\left(-\dfrac{3}{2}\right) & \approx & -0,026<0 \end{array}\right. \Bigg|\Rightarrow -\frac{3}{2}\leq c\leq -\frac{3}{2}+2.10^{-2}$$

Soit

$$c\in\left[-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{3}{2}+2.10^{-2}\right[$$

d'où

$$\boxed{c<-\frac{3}{2}+2.10^{-2}}$$

3. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par : $c\leqslant x\leqslant 0$ et $0\leqslant y\leqslant f(x)$

3. a. Écrire $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale.

Comme f est continue et positive sur $[c\,;\,0]$, alors

$$\boxed{\mathcal{A}=\int_c^0 f(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

3. b. On admet que l'intégrale $I=\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-3} près. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

Pour calculer la valeur exacte de I, il faut déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,0\right]$.

C, C_1, C_2 et C_3 désignant des constantes on a :

- La fonction $x\longmapsto x+1$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto \dfrac{x^2}{2}+x+C_1$;
- La fonction $x\longmapsto -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ (forme $u'\,\mathrm{e}^{\,u}$) a pour primitive la fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}+C_2$;
- La fonction $x\longmapsto -3x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}+C_3$.

La fonction f admet donc pour primitive la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}+C$.

De ce fait

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(0)-F\left(-\frac{3}{2}\right) \\ I &= \frac{3}{2}-\left(\frac{9}{8}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}\right) \\ I &= \frac{15}{8}-\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{I=\int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}}$$

Exercice 2. Probabilités 5 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients. On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

1. a. Déterminer la valeur de λ.
Le temps moyen d'attente est de 10 minutes donc $E(X) = 10$; or $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{10} = 0,1}$$

1. b. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.
La probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes est $P(10 \leq X \leq 20)$.
Comme X suit la loi exponentielle de paramètre $0,1$ on sait que :

$$P(10 \leq X \leq 20) = \int_{10}^{20} 0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right]_{10}^{20} = -\,\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} \approx 0,2325$$

La probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table est donc d'**environ 0,2325**.

1. c. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ?

Propriété 1 (Durée de vie sans vieillissement)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h :

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».

Un client attend depuis 10 minutes. La probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table est la probabilité qu'il attende au moins 15 minutes, sachant qu'il a déjà attendu 10 minutes ; c'est-à-dire :

$$P_{X \geqslant 10}(X \geqslant 15)$$

On sait que la loi exponentielle est une loi à « *durée de vie sans vieillissement* » donc d'après la propriété 1, pour tous réels strictement positifs h et t :

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$

On en déduit que pour $h = 5$ et $t = 10$:

$$P_{X \geqslant 10}(X \geqslant 15) = P(X \geqslant 5)$$

On sait que, pour une loi exponentielle de paramètre λ,

$$P(X \leq a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

donc pour $\lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$

$$P(X \leq 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,1 \times 5} = 1 - \mathrm{e}^{-0,5}$$

d'où

$$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)$$

soit

$$\boxed{P(X \geqslant 5) = \mathrm{e}^{-0,5} \approx 0,6065}$$

La **probabilité cherchée est $0,6065$, arrondi à 10^{-4}**.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire **Y suit alors une loi binomiale**.

2. a. Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.
La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.

Une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,,\,p)$ a pour espérance mathématique np et pour écart type $\sqrt{np(1-p)}$.

Donc

$$\boxed{E(Y) = n \times 0,8 = 0,8n} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma(Y) = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}}$$

2. b. Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

Calculer la probabilité p_1 de l'évènement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.
À la calculatrice, on trouve

$$\boxed{p_1 = P(Z \leq 71) \approx 0,96}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(0, 71, 64.8, 3.6) \approx 0{,}957\,485\,401\,3$$

2. c. On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'évènement $\{Z \leqslant 70\}$. Le restaurant a reçu 81 réservations.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

On cherche donc la probabilité que plus de 70 clients se présentent, c'est-à-dire $P(Y > 70)$. Or

$$\boxed{P(Y > 70) = 1 - P(Y \leq 70) = 1 - p_1 \approx 0,04}$$

La probabilité cherchée est $0,04$.

Exercice 3. Suites 5 points

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps. Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

1. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est le multiplier par $0,8$ donc $u_{n+1} = 0,8\,u_n$.

La suite (u_n) est donc **géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $u_0 = 10$**.

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 10 \\ u_{n+1} & = 0,8\,u_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

1. b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est géométrique, donc pour tout entier n, on a $u_n = u_0 \times q^n$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = 10 \times 0,8^n}$$

1. c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

La quantité de médicament est inférieure à 1 % de la quantité initiale quand

$$u_n < \frac{1}{100} \times u_0$$

c'est-à-dire

$$u_n < 0,1$$

On résout l'inéquation, pour n entier naturel :

$$\begin{aligned}
u_n < 0,1 &\iff 10 \times 0,8^n < 0,1 \\
&\iff 0,8^n < 0,01 \\
&\iff \ln\left(0,8^n\right) < \ln 0,01 && \text{: car on compose par la fonction ln qui est croissance sur }]0\,;+\infty[\\
&\iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 && \text{: par propriété, pour a positif strictement, } \ln a^n = n \ln a \\
u_n < 0,1 &\iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} && \text{: car } \ln 0,8 < 0 \text{, on divise donc les deux membres par un terme strictement négatif}
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$$

donc **au bout de 21 minutes** que la quantité de médicament dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale.

Remarque : On obtient avec la calculatrice :

$$u_{20} \approx 0,115 > 0,1 \quad \text{et} \quad u_{21} \approx 0,092 < 0,1$$

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine. Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n. L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute :

Variables : n est un entier naturel.
v est un nombre réel.
Initialisation : Affecter à v la valeur 10.
Traitement : Pour n allant de 1 à 15
  Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
  Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$
  Afficher v.
Fin de boucle.

2. a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

Le tableau ci-dessous donne la quantité restante de médicament minute par minute :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	$5,12$	$8,10$	$6,48$	$5,18$	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

2. b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?
On peut reprendre le tableau précédent, dès que

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	$5,12$	$8,10$	$6,48$	$5,18$	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24
Quantité injec-tée	10mL				+ 4mL			+ 4mL			+ 4mL			+ 4mL		

Le patient a absorbé 10 mL au début. Quand la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL, cela se produit quatre fois, les minutes 4, 7, 10 et 13, soit $4 \times 4 = 16$ mL.
Au total, on a donc injecté **26 mL de produit**.

2. c. On programme la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

Variables : n est un entier naturel.
v est un nombre réel.
Initialisation : Affecter à v la valeur 10.
Traitement : Pour n allant de 1 à 30
  Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
  Si $v \leq 6$ alors affecter à v la valeur $v + 2$
  Afficher v.
Fin de boucle.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

3. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL.

On peut donc dire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ w_{n+1} = 0,8w_n + 1}$$

3. b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$, donc $w_n = z_n + 5$.

Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\,;\ z_{n+1} &= w_{n+1} - 5\\
&= 0,8w_n + 1 - 5\\
&= 0,8w_n - 4\\
&= 0,8\left(w_n - \frac{4}{0,8}\right)\\
&= 0,8\,(w_n - 8)\\
z_{n+1} &= 0,8z_n
\end{aligned}$$

La suite (z_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,8$,**
et de premier terme $z_0 = w_0 - 5 = 10 - 5 = 5$.

$$\boxed{(z_n) : \begin{cases} z_0 & = 5 \\ z_{n+1} & = 0,8w_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout entier n :

$$z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n$$

Or pour tout entier n, $w_n = z_n + 5$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ w_n = 5 \times 0,8^n + 5}$$

3. d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Par théorème

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,8 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} 5 \times (0,8)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (w_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 5}$$

Cela veut dire que, si on poursuit ce traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient va se rapprocher de 5 mL.

Exercice 4. Non Spécialité : Géométrie dans l'espace 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets sont :

$$\mathrm{A}\left(1\ ;\ -\sqrt{3}\ ;\ 0\right)\ ;\ \mathrm{B}\left(1\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 0\right)\ ;\ \mathrm{C}(-2\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{D}\left(0\ ;\ 0\ ;\ 2\sqrt{2}\right).$$

Dans tout cet exercice, le calcul de longueur est légitime avec les formules usuelles car on se place dans un repère orthonormé. Toutes les distances seront exprimées dans l'unité de longueur du repère que l'on peut noter u.l.

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 2\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$;
- le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ a pour coordonnées $\left(-1\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 2\sqrt{2}\right)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les trois points A, B, D définissent un plan.

La relation $4x + z\sqrt{2} = 4$ est de la forme $ax + by + cz = d$, c'est donc une équation d'un plan $\mathcal{P}$.
En outre :

- $4x_\mathrm{A} + z_\mathrm{A}\sqrt{2} = 4 \times 1 = 4$ donc $\mathrm{A} \in \mathcal{P}$;
- $4x_\mathrm{B} + z_\mathrm{B}\sqrt{2} = 4 \times 1 = 4$ donc $\mathrm{B} \in \mathcal{P}$;
- $4x_\mathrm{D} + z_\mathrm{D}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ donc $\mathrm{D} \in \mathcal{P}$.

Donc $\mathcal{P}$ est le plan (ABD) qui a pour équation :

$$\boxed{(ABC)\ :\ 4x + z\sqrt{2} = 4}$$

2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

2. a. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

- En prenant $t = 0$, on trouve $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ donc le point O appartient à $\mathcal{D}$.
- La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{2}\right)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ a pour coordonnées $\left(2\ ;\ 0\ ;\ 2\sqrt{2}\right)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 2\vec{u}$ ce qui entraîne que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à (CD).

2. b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD).

Le point G d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD) a des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \\ 4x + z\sqrt{2} = 4 \end{cases}$$

Donc

$$4t + t\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \iff 6t = 4 \iff t = \frac{2}{3}$$

Le point G a pour coordonnées

$$\boxed{G\left(\frac{2}{3}\ ;\ 0\ ;\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$$

3. On note L le milieu du segment [AC].

3. a. Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

Le point L a pour coordonnées

$$L\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\,\frac{y_A+y_C}{2}\,;\,\frac{z_A+z_C}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,0\right)$$

Le vecteur $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{BL}\left(-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\,0\right)$$

le vecteur $\overrightarrow{BO}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{BO}\left(-1\,;\,-\sqrt{3}\,;\,0\right)$$

Donc

$$\frac{2}{3}\,\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BO}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires donc les points B, O et L sont alignés.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AC}\left(-3\,;\,\sqrt{3}\,;\,0\right)$.

On calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{BL}$ et de $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BL}\,.\,\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\times(-3)+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt{3}+0=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

On peut donc dire que **la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC)**.

3. b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

La droite (BL) passe par le milieu de [AC] et est perpendiculaire à (AC) donc c'est la médiatrice de [AC], de ce fait $BA = BC$.

- D'une part : $BA^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2=\left(-2\sqrt{3}\right)^2=12$;
- D'autre part : $CA^2=(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_Z)^2=(1+2)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2=9+3=12$

Donc $BA^2 = CA^2$ et $BA = CA$.

On peut en déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Donc son cercle circonscrit est aussi son centre de gravité ; il est situé aux $\frac{2}{3}$ d'une médiane en partant du sommet.

Or on a vu que

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BO}$$

donc on peut en déduire que **le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC**.

4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

On a déjà vu que

$$AB = AC = BC = \sqrt{12}$$

On calcule les longueurs des autres arêtes du tétraèdre :

- $DA^2=(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=1+3+8=12$
- $DB^2=(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=1+3+8=12$
- $DC^2=2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=4+8=12$

Donc les six arêtes du tétraèdre ABCD ont la même longueur, il est régulier.

Exercice 4. Spécialité : Suites et matrices — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.
On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

1. a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

Lors de la première ouverture des portes il reste dans A 80 % des souris présentes soit une proportion de $0,5 \times 0,8 = 0,40$ et il rentre 10 % de souris venant de B soit $0,5 \times 0,1 = 0,05$. Donc il y aura dans A au total $0,40 + 0,05 = 0,45$ comme proportion de souris.

Il en reste donc $1 - 0,45 = 0,55$ pour B. Donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

1. b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

- Lors de la $n+1$-ième ouverture de porte, il restera dans A 80 % des souris présentes, soit $0,8\,a_n$ et il en vient 10 % de B soit $0,10\,b_n$; donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ a_{n+1} = 0,8\,a_n + 0,1\,b_n}$$
- Lors de la $n+1$-ième ouverture de porte, il restera dans B 90 % des souris présentes, soit $0,9\,b_n$ et il en vient 20 % de A soit $0,20\,a_n$; donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_{n+1} = 0,2\,a_n + 0,9\,b_n}$$

1. c. En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

D'après la question précédente,
$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8\,a_n + 0,1\,b_n \\ 0,2\,a_n + 0,9\,b_n \end{pmatrix}$$

On cherche une matrice carrée d'ordre 2
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$
telle que
$$MU_n = U_{n+1}$$
Soit
$$MU_n = U_{n+1} \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha a_n + \beta b_n \\ \gamma a_n + \delta b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8\,a_n + 0,1\,b_n \\ 0,2\,a_n + 0,9\,b_n \end{pmatrix}$$

Donc par identification
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_{n+1} = MU_n \ \text{ avec } \ M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}}$$

On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

1. d. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

La répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours est donnée par U_3 ; à la calculatrice, on trouve

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0,562 & 0,219 \\ 0,438 & 0,781 \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{U_3 = M^3 \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,562 & 0,219 \\ 0,438 & 0,781 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3905 \\ 0,6095 \end{pmatrix}}$$

La répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours est respectivement **39,05 % et 60,95 %**.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 1 + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

où I est la matrice unité d'ordre 2.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\frac{1}{3}P^2 = I$$

ce qui entraîne que

$$P \times \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}P \times P = I$$

La matrice P est donc inversible et son inverse est

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

2. b. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$P^{-1}M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \times 0,8 + 1 \times 0,2 & 1 \times 0,1 + 1 \times 0,9 \\ 2 \times 0,8 + (-1) \times 0,2 & 2 \times 0,1 + (-1) \times 0,9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -0,7 \end{pmatrix}$$

soit

$$\left(P^{-1}M\right)P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(P^{-1}M\right)P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 1,4 \times 1 + (-0,7) \times 2 & 1,4 \times 1 + (-0,7) \times (-1) \end{pmatrix}$$

$$\left(P^{-1}M\right)P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix}$$

$$\left(P^{-1}M\right)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1}MP$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ que l'on appelle D.

$$\boxed{P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}}$$

2. c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Soit pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}_n$ la propriété $M^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation.**
  Pour $n = 1$ on a :
  $$P^{-1}MP = D \Leftrightarrow PP^{-1}MP = PD \Leftrightarrow MP = PD \Leftrightarrow MPP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$$
  donc la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 1.
- **Hérédité.**
  On suppose, pour p entier fixé, $p \geqslant 1$, que la propriété vraie, c'est-à-dire que
  $$M^p = PD^pP^{-1}$$
  D'après l'hypothèse de récurrence $M^p = PD^pP^{-1}$ et on sait que $M = PDP^{-1}$ donc :
  $$\begin{aligned} M^{p+1} &= M \times M^p \\ &= PDP^{-1} \times PD^pP^{-1} \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D^pP^{-1} \\ &= P\left(DD^p\right)P^{-1} \\ M^{p+1} &= PD^{p+1}P^{-1} \end{aligned}$$
  donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.
- **Conclusion**.
  La propriété est vraie au rang 1 ; elle est héréditaire pour tout entier $p \geqslant 1$ donc la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ M^n = PD^nP^{-1}}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} & \dfrac{1 - 0,7^n}{3} \\ \dfrac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} & \dfrac{2 + 0,7^n}{3} \end{pmatrix}$

3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

Pour avoir la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage, il faut chercher $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

$$U_n = M^nU_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} & \dfrac{1 - 0,7^n}{3} \\ \dfrac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} & \dfrac{2 + 0,7^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + 2 \times 0,7^n + 1 - 0,7^n}{6} \\ \dfrac{2 - 2 \times 0,7^n + 2 + 0,7^n}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2 + 0,7^n}{6} \\ \dfrac{4 - 0,7^n}{6} \end{pmatrix}$$

La suite $(0,7^n)$ est géométrique de raison 0,7 ; or $-1 < 0,7 < 1$ donc d'après le théorème 2 on a :
$$\lim_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$$
On en déduit que
$$\lim_{n \to +\infty} 2 + 0,7^n = 2$$
et que
$$\lim_{n \to +\infty} 4 - 0,7^n = 4$$
et donc que
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{6} \\ \dfrac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

La répartition à long terme des souris dans les compartiments est de $\dfrac{1}{3}$ **pour le compartiment A et de** $\dfrac{2}{3}$ **pour le compartiment B**.