Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S Métropole

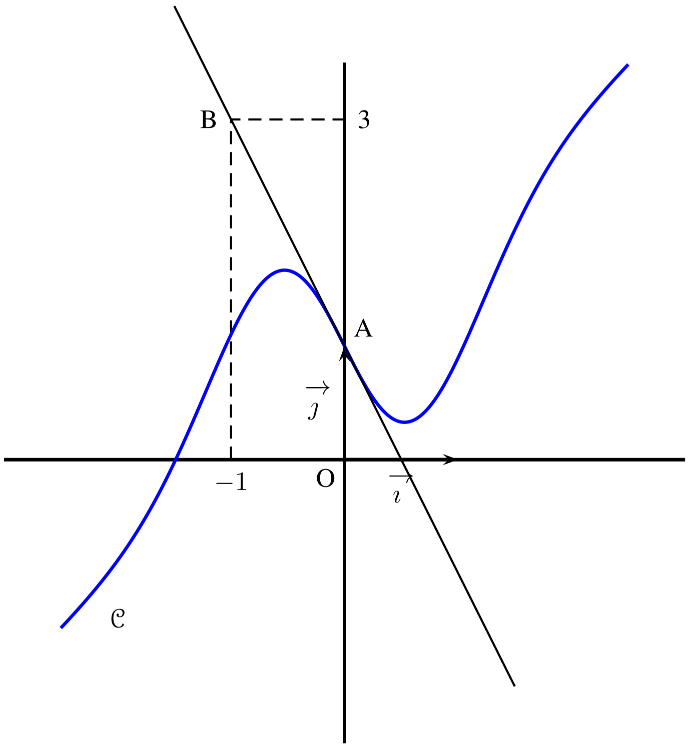
Série S Obli. et Spé.
Jeudi 11 septembre 2014

Ce sujet est celui de la session de septembre de Métropole, dite de remplacement.

Exercice 1. Fonctions — 5 points

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(-1\,;\,3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + ax\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. 1. a. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.

1. b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

1. c. Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3x\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

2. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$, $f(x) > 0$.

2. b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

2. c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\dfrac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

3. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

$$c \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

3. a. Écrire $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale.

3. b. On admet que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-3} près.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

Exercice 2. 5 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

1. a. Déterminer la valeur de λ.

1. b. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

1. c. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

2. a. Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

2. b. Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

Calculer la probabilité p_1 de l'évènement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

2. c. On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'évènement $\{Z \leqslant 70\}$.

Le restaurant a reçu 81 réservations.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

Exercice 3. — 5 points

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps. Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

1. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

1. b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

1. c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.

L algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

2. a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

2. b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

2. c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

3. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

3. b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.

Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

3. d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice 4. : Non Spécialité 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A\left(1\,;\,-\sqrt{3}\,;\,0\right)\,;\,B\left(1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0\right)\,;\,C(-2\,;\,0\,;\,0)\,;\,D\left(0\,;\,0\,;\,2\sqrt{2}\right).$$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.

2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= t\sqrt{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. a. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

2. b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD).

3. 3. a. On note L le milieu du segment [AC].
Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

3. b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à -dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

Exercice 4. : Spécialité — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.
On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

1. a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

1. b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

1. c. En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.
On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

1. d. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

2. b. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

2. c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$M^n = PD^nP^{-1}$$

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient

$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} & \dfrac{1 - 0,7^n}{3} \\ \dfrac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} & \dfrac{2 + 0,7^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?