Baccalauréat série S Amérique du Sud
17 novembre 2014 – Corrigé

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football.
Cette entreprise propose deux tailles de ballons : une petite taille, et une taille standard.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).
En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410 ; 450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68 ; 70]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.
   On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.
   À la calculatrice, on trouve $P(410 \leqslant X \leqslant 450) \approx 0,954$.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.
   On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.
   On sait que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation ce qui veut dire que $P(68 \leqslant Y \leqslant 70) \approx 0,97$.
   Si Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 69$ et d'écart type σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y-69}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
   De plus : $68 \leqslant Y \leqslant 70 \iff -1 \leqslant Y-69 \leqslant 1 \iff -\dfrac{1}{\sigma} \leqslant \dfrac{Y-69}{\sigma} \leqslant \dfrac{1}{\sigma} \iff -\dfrac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{\sigma}$
   On a donc $P(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97 \iff P\left(-\dfrac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{\sigma}\right) = 0,97$.
   Or, d'après le texte, $P(-2,17 \leqslant Z \leqslant 2,17) = 0,97$.
   On peut déduire que $\dfrac{1}{\sigma} = 2,17$ et donc que $\sigma \approx 0,46$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $n = 250$ et $p = 0,98$.
- $250 \geqslant 30$;
- $np = 250 \times 0,98 = 245 \geqslant 5$;
- $n(1-p) = 250 \times 0,02 = 5 \geqslant 5$

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de conformité des ballons est :

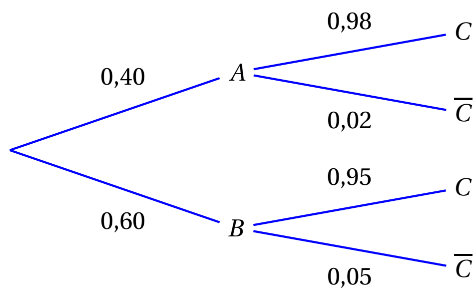
$$I = \left[0,98 - 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}} ; 0,98 + 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}\right] = [0,962 ; 0,998]$$

Il y a 233 ballons conformes sur 250 ce qui fait une fréquence de $f = \dfrac{233}{250} = 0,932$.
$0,932 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise.

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard.
On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.
On considère les évènements :
A : « le ballon de football est de petite taille »,
B : « le ballon de football est de taille standard »,
C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\overline{C}$, l'évènement contraire de C.

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. « Le ballon est de petite taille et il est conforme à la règlementation » correspond à l'événement $A \cap C$. D'après l'arbre : $P(A \cap C) = 0,40 \times 0,98 = 0,392$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = 0,40 \times 0,98 + 0,60 \times 0,95 = 0,392 + 0,570 = 0,962$

4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation.
On cherche la probabilité qu'il soit de petite taille, autrement dit on cherche $P_{\overline{C}}(A)$.
$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,962 = 0,038$ donc $P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,40 \times 0,02}{0,038} \approx 0,211$

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. b.
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A (2 ; 5 ; −1), B (3 ; 2 ; 1) et C (1 ; 3 ; −2).
$\text{AB}^2 = (3-2)^2 + (2-5)^2 + (1+1)^2 = 1 + 9 + 4 = 14$
$\text{AC}^2 = (1-2)^2 + (3-5)^2 + (-2+1)^2 = 1 + 4 + 1 = 6$
$\text{BC}^2 = (1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2 = 4 + 1 + 9 = 14$
Donc le triangle ABC est isocèle non rectangle.

2. c.
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A (2 ; 5 ; −1).
Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}(2 ; -1 ; 3)$, donc toute droite perpendiculaire au plan P aura un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{n}$, ce qui élimine les propositions **a.** et **b.**
On cherche si le point A appartient à la droite dont la représentation paramétrique est en **c.** ; on résout le système : $\left\{\begin{array}{r c l} 2 &=& 6 - 2t \\ 5 &=& 3 + t \\ -1 &=& 5 - 3t \end{array}\right.$
Ce système a pour solution $t = 2$ donc la bonne réponse est **c.**

3. c.

Soit A et B deux points distincts du plan.

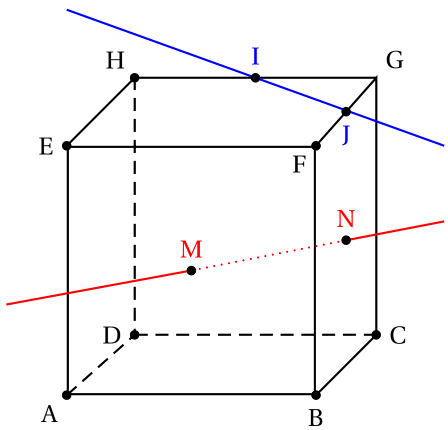
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \iff \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB} \iff MAB$ est un triangle rectangle en M

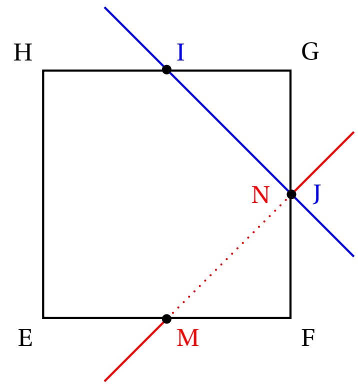
$\iff M$ appartient au cercle de diamètre [AB]

4. c.

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.

Les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales; il suffit pour s'en convaincre de regarder le cube du dessus :





Exercice 3 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Partie A : Conjecture

1. $u_2 = -\dfrac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}2^2 + 3\times 2 - \dfrac{3}{2} = -2+6-\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

   $u_3 = -\dfrac{1}{2}u_2^2 + 3u_2 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 3\times\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{25}{8} + \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{8}$

2. En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}$, on obtient :

   $u_3 = f(u_2) = f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{383}{128} \approx 2{,}992\,19$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\dfrac{383}{128}\right) \approx 2{,}999\,97$

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2}$

   $v_n^2 = (u_n-3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\dfrac{1}{2}v_n^2 = -\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2} = v_{n+1}$

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

   - $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$; la propriété est vraie au rang 0.

- Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant v_p \leqslant 0$.
  On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\dfrac{1}{2}v_p^2$.
  $-1 \leqslant v_p \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_p^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2}v_p^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$
  Donc $-1 \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$

3. **a.** Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$

b. Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.
Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$; donc $\dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) est convergente.

5. On note ℓ limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in [-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.

On résout l'équation $x = -\dfrac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :

$x = -\dfrac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2+x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

Mais on sait que $\ell \in [-1 ; 0]$ donc ne peut pas correspondre à $x = -2$.

Donc $\ell = 0$ et la limite de la suite (v_n) est 0.

6. La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est croissante.

La suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est convergente vers 3.

Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

Exercice 3 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.
On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :

- 20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.
- 60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. D'après le texte, on peut dire que, pour tout n : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,2\,a_n + 0,1\,b_n \\ b_{n+1} = 0,6\,a_n + 0,3\,b_n \end{cases}$ avec $\begin{cases} a_0 = 50 \\ b_0 = 60 \end{cases}$

Donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \iff U_{n+1} = M \times U_n$ où $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$

2. $U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 50 + 0,1 \times 60 \\ 0,6 \times 50 + 0,3 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$

$U_2 = M \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 16 + 0,1 \times 48 \\ 0,6 \times 16 + 0,3 \times 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$

3. À la calculatrice, on trouve successivement : $U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

C'est donc au bout de 5 heures qu'il ne reste qu'un seul vélo dans la station A.

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.
Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :
Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.

a. On désigne par V une matrice colonne à deux lignes.
$V = M \times V + R \iff V - M \times V = R \iff I \times V - M \times V = R \iff (I - M) \times V = R \iff N \times V = R$

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.

$N \times V = R \iff N^{-1} \times N \times V = N^{-1} \times R \iff V = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} \iff V = \begin{pmatrix} 1,4 \times 30 + 0,2 \times 10 \\ 1,2 \times 30 + 1,6 \times 10 \end{pmatrix}$

$\iff V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$.

a. $W_{n+1} = V_{n+1} - V$; or $V_{n+1} = M \times V_n + R$ et $V = M \times V + R$ donc, pour tout entier n :
$W_{n+1} = M \times V_n + R - (M \times V + R) = M \times V_n + R - M \times V - R = M \times (V_n - V) = M \times W_n$

b. On admet que : – pour tout entier naturel n, $W_n = M^n \times W_0$,
– pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

$W_0 = V_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Pour tout n, $W_n = M^n \times W_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$; donc pour tout $n \geqslant 1$,
$W_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 \times 6 + 0,1 \times 8 \\ 0,6 \times 6 + 0,3 \times 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
On sait que, pour tout n, $W_n = V_n - V$ donc $V_n = W_n + V$.
Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $V_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$

c. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} V_n = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$
Le nombre de vélos va se stabiliser à 44 dans la station A et à 52 dans la station B.

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + b$ où b est un nombre réel.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $[0;2]$:
   $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-4x} + \left(x + \dfrac{1}{4}\right)(-4)\,\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x} - 4x\mathrm{e}^{-4x} - \mathrm{e}^{-4x} = -4x\mathrm{e}^{-4x}$

   b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-4x} > 0$ et pour tout x de $]0\ ;\ 2]$, $x > 0$
   Donc, pour tout x de $]0\ ;\ 2]$, $-4x\mathrm{e}^{-4x} < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 2]$.

2. La fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 2]$ donc son maximum est $f(0)$. On sait que le maximum est 1,5 on a donc $f(0) = 1,5$ ce qui équivaut à $\dfrac{1}{4} + b = 1,5 \iff b = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4} \iff b = \dfrac{5}{4}$.
   Il faut donc que b soit égal à $\dfrac{5}{4}$ pour que le maximum de la fonction f soit égal à 1,5.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4}$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $F(x) = \left(-\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4}x$
   La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,donc elle est dérivable sur $[0;2]$:
   $F'(x) = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x} + \left(-\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}\right)(-4)\,\mathrm{e}^{-4x} = \dfrac{5}{4} = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x} + x\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4} = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4} = f(x)$
   Donc F est une primitive de f sur $[0\ ;\ 2]$.

2. La fonction f est positive sur $[0\ ;\ 2]$ donc l'aire du vantail est $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Comme F est une primitive de f sur $[0\ ;\ 2]$, cette intégrale est égale à $F(2) - F(0)$.
   $F(2) = -\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-8} + \dfrac{5}{2}$ et $F(0) = -\dfrac{1}{8}$ donc $F(2) - F(0) = \dfrac{21}{8} - \dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-8}$
   Pour calculer l'aire du vantail il faut retrancher l'aire du vide de 0,05 m de haut 2 m de large et l'aire du vantail est égale à :
   $F(2) - F(0) - 2 \times 0,05 = \dfrac{21}{8} - \dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-8} - 0,1 \approx 2,52\ \text{m}^2$.

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

1. Les bords gauches des planches sont situés tous les $0,12+0,05=0,17$ m donc le bord gauche de la planche numéro k est situé à l'abscisse $0,17\times k$.

   L'ordonnée du point d'abscisse $0,17k$ est $f(0,17k)$ mais comme chaque planche est située à une hauteur de 0,05 m du sol, la hauteur de la planche numéro k est de $f(0,17k)-0,05$ en mètres.

   Chaque planche a une largeur de 0,12 m donc l'aire de la planche numéro k est, en m^2, égale à $\big(f(0,17k)-0,05\big)\times 0,12$.

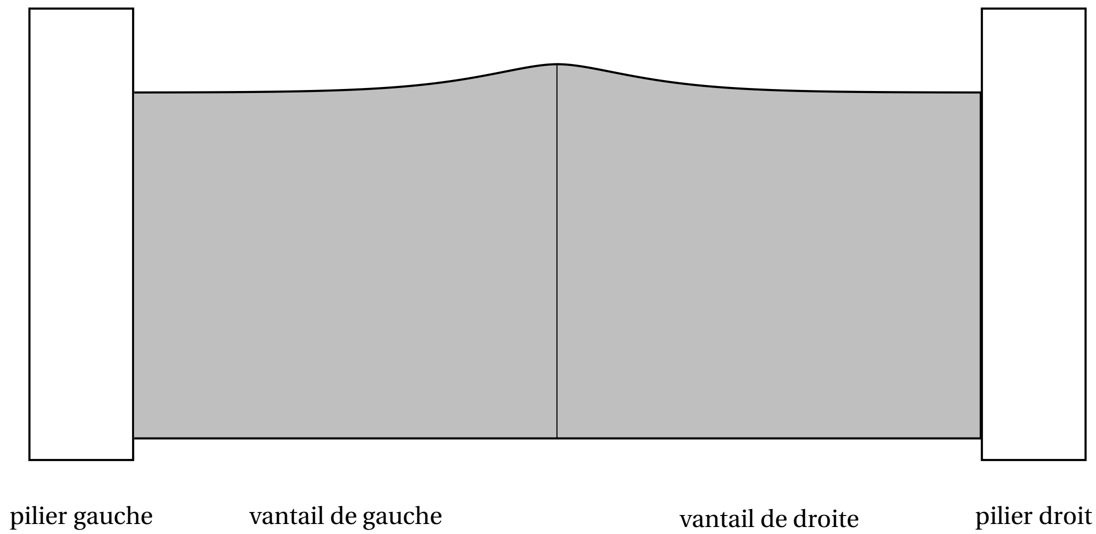
2. L'algorithme suivant calcule la somme des aires des planches du vantail de droite :

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant Que** $X+0,17<2,05$
	S prend la valeur $S+0,12\big(f(X)-0,05\big)$
	X prend la valeur $X+0,17$
	Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S

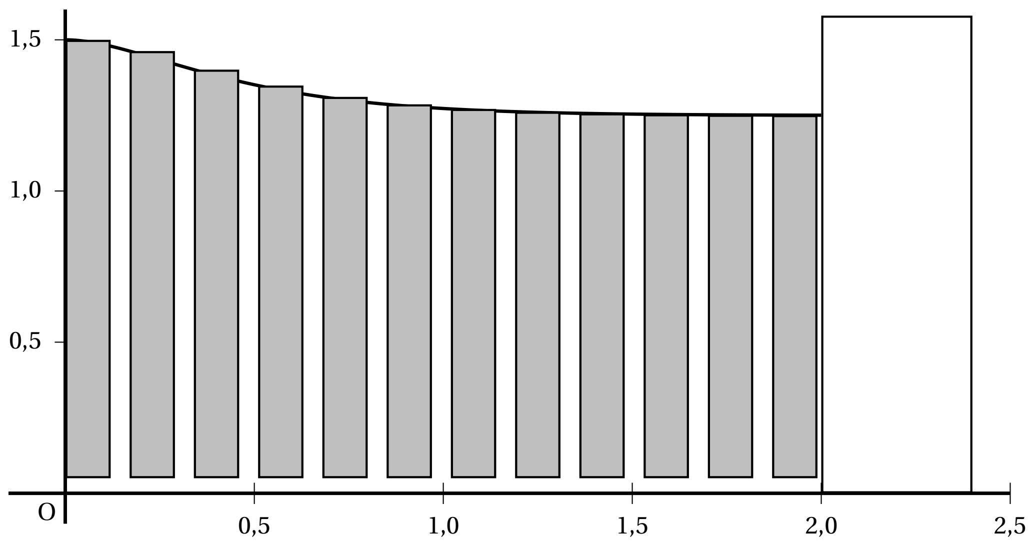
Dans cet algorithme, S désigne la somme des aires des planches du vantail de droite, et X désigne l'abscisse du bord gauche de chaque planche.

Comme la largeur d'une planche est de 0,12 m, il ne faut pas que l'abscisse X du bord gauche de la dernière planche soit supérieure à $2-0,12$; il faut donc faire tourner la boucle « Tant que $X+0,12<2$ », autrement dit « Tant que $X+0,17<2,05$ ».

Annexe 1 de l'exercice 4



Annexe 2 de l'exercice 4



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m.