Baccalauréat 2014 - S
Amérique du Sud

Série S Obli. et Spé.
Novembre 2014
Correction

Exercice 1. Probabilités — 6 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons : une petite taille, et une taille standard.

Partie A

Un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle [410 ; 450] et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle [68 ; 70].

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes. On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(410 \leqslant X \leqslant 450)$.

À la calculatrice, on trouve au millième près

$$\boxed{P(410 \leqslant X \leqslant 450) \approx 0,954}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(410, 450, 430, 10) \approx 0{,}954\,499\,875\,997\,2$$

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres. On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.
Déterminer la valeur de σ, au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.
On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta) = 0,97$ pour $\beta \approx 2,17$.

Si Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 69$ et d'écart type σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y-69}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
Or

$$P(68 \leq Y \leq 70) = P(-1 \leq Y - 69 \leq 1)$$
$$P(68 \leq Y \leq 70) = P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq \frac{Y-69}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\right)$$
$$P(68 \leq Y \leq 70) = P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right)$$

On a donc

$$P(68 \leq Y \leq 70) = 0,97 \iff P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 0,97$$

Et d'après les données

$$P(-2,17 \leq Z \leq 2,17) = 0,97$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{ll} P(-2,17 \leq Z \leq 2,17) & = 0,97 \\ P\left(-\dfrac{1}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{1}{\sigma}\right) & = 0,97 \end{array}\right\} \underset{\text{par identification}}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sigma} = 2,17 \text{ et } \boxed{\sigma \approx 0,46}$$

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation. Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse. (On pourra utiliser l'intervalle de fluctuation).

- **1. Analyse des données** :
  - « *sur un échantillon de* $n = 250$ *ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.* »Donc la fréquence observée de ballons conformes est
$$f = \frac{233}{250} = 0{,}932 = \mathbf{93,2\%}$$
  - L'entreprise affirme que $\boldsymbol{p = 98\%}$ de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation.
- **2. Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark \quad n \geq 30 \\ \checkmark \quad np \geq 5 \\ \checkmark \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a $n = 250$, $p = 0,98$ vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark \quad n = 250 \geq 30 \\ \checkmark \quad np = 250 \times 0,98 = 245 \geq 5 \\ \checkmark \quad n(1-p) = 250 \times 0,02 = 5 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,98 - 1,96\ \frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}} \ ; \ 0,98 + 1,96\ \frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}962\,6$. On arrondit la borne inférieure par défaut au millième soit $\mathbf{0,962}$.
- $p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}997\,35$. On arrondit la borne supérieure par excès au millième soit $\mathbf{0,998}$.

$$\boxed{I \approx [0{,}962\ ;\ 0{,}998]}$$

- **3. Conclusion**
La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $0,932 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise.

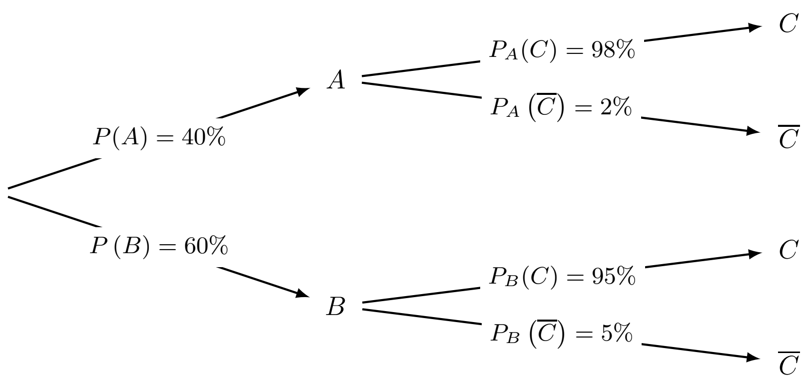
Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard. On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise. On considère les évènements :

- A : « le ballon de football est de petite taille »,
- B : « le ballon de football est de taille standard »,
- C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\overline{C}$, l'évènement contraire de C.

1. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.

En remarquant que $B = \overline{A}$ on a :



2. Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la règlementation.
« Le ballon est de petite taille et il est conforme à la règlementation » correspond à l'événement $A \cap C$. D'après l'arbre :

$$P(A \cap C) = P_A(C) \times P(A)$$
$$P(A \cap C) = 0,98 \times 0,40$$

Soit

$$\boxed{P(A \cap C) 0,392}$$

3. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à $0,962$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$
$$P(C) = 0,392 + P_B(C) \times P(B)$$
$$P(C) = 0,392 + 0,95 \times 0,60$$
$$P(C) = 0,392 + 0,570$$

Soit

$$\boxed{P(C) = 0,962}$$

4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.
On cherche la probabilité qu'il soit de petite taille, autrement dit on cherche $P_{\overline{C}}(A)$.

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,962 = 0,038$$

donc

$$P_{\overline{C}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0,40 \times 0,02}{0,038}$$

Soit arrondi au millième

$$\boxed{P_{\overline{C}}(A) \approx 0,211}$$

Exercice 2. QCM de Géométrie dans l'espace — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Réponse b.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A $(2~;~5~;~-1)$, B $(3~;2~;1)$ et C $(1~;~3~;~-2)$. Le repère étant orthonormé, on peut calculer les distances avec les formules usuelles :

- $\text{AB}^2 = (3-2)^2 + (2-5)^2 + (1+1)^2 = 1+9+4 = 14$
- $\text{AC}^2 = (1-2)^2 + (3-5)^2 + (-2+1)^2 = 1+4+1 = 6$
- $\text{BC}^2 = (1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2 = 4+1+9 = 14$

Le triangle ABC **est isocèle en B**.
Si il était rectangle, ce serait en B car AB et BC sont les plus grands côtés. Or :

$$AB^2 + BC^2 \neq AC^2$$

Donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle. Le triangle ABC **est isocèle en B et non rectangle**.

2. Réponse c.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x-y+3z-1=0$ et le point A $(2~;~5~;~-1)$. Une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan P et passant par A est :
Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\,(2~;-1~;3)$, donc toute droite perpendiculaire au plan P aura un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{n}$, ce qui élimine les propositions **a.** et **b.**
On cherche si le point A appartient à la droite dont la représentation paramétrique est en **c.** ; on résout le système :

$$\begin{cases} 2 = 6-2t \\ 5 = 3+t \\ -1 = 5-3t \end{cases}$$

Ce système a pour solution $t=2$ donc la bonne réponse est **c.**

3. Réponse c.

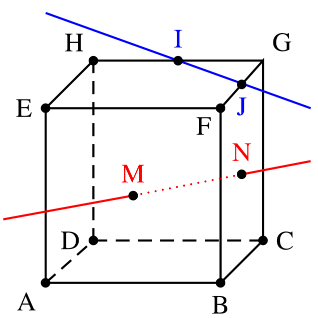
Soit A et B deux points distincts du plan.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 &\iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \\ &\iff \text{MAB est un triangle rectangle en M} \\ &\iff \text{M appartient au cercle de diamètre [AB]} \end{aligned}$$

4. Réponse c. Les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et non coplanaires).

Choisissons le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$
Les points I, J, M et N ont pour coordonnées :

$$I\left(\frac{1}{2}~;~1~;~1\right),\quad J\left(1~;~\frac{1}{2}~;~1\right),\quad M\left(\frac{1}{2}~;~0~;~\frac{1}{2}\right),\quad N\left(1~;~\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}\right)$$



I et J ont la même cote : ils appartiennent au plan d'équation $z=1$;
M et N ont la même cote : ils appartiennent au plan d'équation $z=\frac{1}{2}$.
Ces deux plans sont parallèles et distincts, donc les droites (IJ) et (MN) ne sont ni perpendiculaires ni sécantes. Les réponses **a.** et **b.** sont fausses.
On a

$$\overrightarrow{\text{IJ}}\left(\frac{1}{2}~;~-\frac{1}{2}~;~0\right) \quad\text{et}\quad \overrightarrow{\text{MN}}\left(\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}~;~0\right)$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles. La réponse **d.** est fausse.
Or

$$\overrightarrow{\text{IJ}}.\overrightarrow{\text{MN}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Les vecteurs sont orthogonaux et les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales. Réponse **c.**

Exercice 3. Obligatoire : Suites — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.

- $u_1 = -\dfrac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}2^2 + 3 \times 2 - \dfrac{3}{2} = -2 + 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$
- $u_2 = -\dfrac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{25}{8} + \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{8}$

Donc :

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{2} \; ; \; u_2 = \frac{23}{8}}$$

2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.

En programmant à la calculatrice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$$

on obtient :

$$\boxed{u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{23}{8}\right) = \approx 2{,}992\,19} \text{ et } \boxed{u_4 = f(u_3) = f\left(\frac{383}{128}\right) \approx 2{,}999\,97}$$

3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

3.1 Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) \end{aligned}$$

Or on a aussi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n^2 &= (u_n - 3)^2 \\ v_n^2 &= u_n^2 - 6u_n + 9 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2}$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

- **Initialisation**
  $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leq v_0 \leq 0$ La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**
  Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leq v_p \leq 0$.
  On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\dfrac{1}{2}v_p^2$.

$$\begin{aligned}-1 \leq v_p \leq 0 &\Longrightarrow 0 \leq v_p^2 \leq 1 : \text{car la fonction carrée est décroissante sur } \mathbb{R}_- \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_p^2 \leq 0 \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{2} \leq v_{p+1} \leq 0\end{aligned}$$

  Donc

$$-1 \leq v_{p+1} \leq 0$$

  Et la propriété est vraie au rang $p+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ -1 \leq v_n \leq 0}$$

3.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$.

Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)}$$

3. b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

On a montré lors de la question 2. que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ -1 \leq v_n \leq 0$$

Or

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\,;\ -1 \leq v_n \leq 0 &\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0 : \text{ On multiplie les membres par } \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1 : \text{ On ajoute 1}\end{aligned}$$

De ce fait :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \frac{1}{2}v_n + 1 > 0$$

En outre puisque pour tout entier n : $-1 \leq v_n \leq$ on a $-v_n \geqslant 0$ soit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \left|\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \quad -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la <u>suite (v_n) est croissante</u>.

4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?

La suite (v_n) est <u>croissante et majorée par 0</u> donc, d'après le *théorème de la convergence monotone*, la suite (v_n) est convergente.

5. On note ℓ limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in [-1\,;\,0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.

Déterminer la valeur de ℓ.

On résout l'équation $x = -\dfrac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :

$$x = -\frac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2+x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Mais on sait que $\ell \in [-1\,;\,0]$ donc la seule solution possible est $x = 0$.
Donc

$$\boxed{\text{La limite de la suite } (v_n) \text{ est } 0.}$$

6. Les conjectures faites dans la partie A sont-elles validées ?

- La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est croissante.
- La suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est convergente vers 3.

Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

Exercice 3. Spécialité Maths 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.
On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :

- 20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.
- 60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.
D'après le texte, on peut dire que, pour tout n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,2\,a_n + 0,1\,b_n \\ b_{n+1} = 0,6\,a_n + 0,3\,b_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_0 = 50 \\ b_0 = 60 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \iff \boxed{U_{n+1} = M \times U_n \text{ où } M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}}$$

2. Déterminer U_1 et U_2.

$$U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 50 + 0,1 \times 60 \\ 0,6 \times 50 + 0,3 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = M \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 16 + 0,1 \times 48 \\ 0,6 \times 16 + 0,3 \times 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$$

3. Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?
À la calculatrice, on trouve successivement : $U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

C'est donc au bout de <u>5 heures qu'il ne reste qu'un seul vélo dans la station A</u>.

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.
Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :
Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}$.
Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.

1. a. On désigne par V une matrice colonne à deux lignes. Montrer que $V = M \times V + R$ équivaut à $N \times V = R$.

$$\begin{aligned}
V = M\times V + R &\iff V - M\times V = R\\
V = M\times V + R &\iff I\times V - M\times V = R\\
V = M\times V + R &\iff (I-M)\times V = R
\end{aligned}$$

Donc puisque $N = I - M$:

$$\boxed{V = M\times V + R \iff N\times V = R}$$

1. b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix}1,4&0,2\\1,2&1,6\end{pmatrix}$. En déduire que $V = \begin{pmatrix}44\\52\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
N\times V = R &\iff N^{-1}\times N\times V = N^{-1}\times R\\
N\times V = R &\iff V = \begin{pmatrix}1,4&0,2\\1,2&1,6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}\\
N\times V = R &\iff V = \begin{pmatrix}1,4\times30+0,2\times10\\1,2\times30+1,6\times10\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{V = \begin{pmatrix}44\\52\end{pmatrix}}$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$.

2. a. Montrer que $W_{n+1} = M \times W_n$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\,;\ W_{n+1} = V_{n+1} - V$$

or

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\,;\ V_{n+1} &= M\times V_n + R\\ \qquad\qquad V &= M\times V + R\end{cases}$$

Donc, pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= M\times V_n + R - (M\times V + R)\\
W_{n+1} &= M\times V_n + R - M\times V - R\\
W_{n+1} &= M\times(V_n - V)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\,;\ W_{n+1} = M\times W_n}$$

2. b. Pour la suite on admet que pour tout entier n :

$$\begin{cases} \boldsymbol{W_n} & = \boldsymbol{M^n \times W_0} \\ \boldsymbol{n \geqslant 1, M^n} & = \boldsymbol{\dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}} \end{cases}$$

Calculer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, V_n en fonction de n.

$$W_0 = V_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Or on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ W_n & = M^n \times W_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ M^n & = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$W_n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$W_n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 \times 6 + 0,1 \times 8 \\ 0,6 \times 6 + 0,3 \times 8 \end{pmatrix}$$

$$W_n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On sait que, pour tout n, $W_n = V_n - V$ donc $V_n = W_n + V$.
De ce fait, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ V_n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}}$$

2. c. Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ?

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Le nombre de vélos va se stabiliser à 44 dans la station A et à 52 dans la station B.

Exercice 4. 5 points

Commun à tous les candidats

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par

$$\forall x \in [0\ ;\ 2]\ ;\ f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + b\ ;\ b \in \mathbb{R}$$

1. **1. a. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 2].**
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. A fortiori, la fonction f est dérivable sur [0 ; 2] : La fonction f est de la forme $uv + b$ donc de dérivée $u'v + uv' + 0$ avec :

$$\forall x \in [0\ ;\ 2]\ ;\ f(x) = u(x)v(x) + b \quad : \quad \begin{cases} u(x) = x + \dfrac{1}{4} & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-4x} & ; \quad v'(x) = -4\,\mathrm{e}^{-4x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\ ;\ 2],\quad f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-4x} + \left(x + \frac{1}{4}\right) \times \left(-4\,\mathrm{e}^{-4x}\right) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{-4x} - 4x\,\mathrm{e}^{-4x} - \mathrm{e}^{-4x} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 2]\ ;\ f'(x) = -4x\,\mathrm{e}^{-4x}}$$

1. b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-4x} > 0$ donc la fonction dérivée est du signe de $(-4x)$ qui est clairement négatif sur l'intervalle [0 ; 2].

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 2]\ ;\ f'(x) < 0}$$

La fonction f est strictement décroissante sur $[\ 0\ ;\ 2]$.

2. **Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.**
La fonction f est strictement décroissante sur $[\ 0\ ;\ 2]$ donc son maximum est $f(0)$.
On sait que le maximum est 1,5 on a donc $f(0) = 1,5$ ce qui équivaut à

$$\frac{1}{4} + b = 1,5 \iff b = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \iff b = \frac{5}{4}$$

Il faut donc que b soit égal à $\frac{5}{4}$ pour que le maximum de la fonction f soit égal à 1,5.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4}$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Soit F définie sur [0 ; 2] par $F(x) = \left(-\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4}x$. Montrer que F est une primitive de f sur $[0\ ;\ 2]$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,donc elle est dérivable sur [0 ; 2]. La fonction F est de la forme $uv + \dfrac{5}{4}x$ donc de dérivée $u'v + uv' + \dfrac{5}{4}$ avec :

$$\forall x \in [0\ ;\ 2]\ ;\ F(x) = u(x)v(x) + \frac{5}{4}x \quad : \quad \begin{cases} u(x) = \left(-\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}\right) & ; \quad u'(x) = -\dfrac{1}{4} \\ v(x) = \mathrm{e}^{-4x} & ; \quad v'(x) = -4\,\mathrm{e}^{-4x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\ ;\ 2],\quad F'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + \frac{5}{4} \\ F'(x) &= -\frac{x}{4} \times \mathrm{e}^{-4x} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \times \left(-4\,\mathrm{e}^{-4x}\right) + \frac{5}{4} \\ F'(x) &= -\frac{1}{4} \times \mathrm{e}^{-4x} + x \times \mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{2} \times \mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{4} \\ F'(x) &= \left(-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}\right) \times \mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{4} \\ F'(x) &= \left(x + \frac{1}{4}\right) \times \mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 2],\quad F'(x) = f(x)}$$

Donc F est une primitive de f sur $[0\ ;\ 2]$.

2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

La fonction f est continue et positive sur $[0\ ;\ 2]$, donc l'aire du vantail, exprimée en unité d'aire est :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - \mathcal{A}\text{ire du bord inférieur}$$

Puisque F est une primitive de f sur $[0\ ;\ 2]$, cette intégrale est égale à :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= F(2) - F(0) \\ \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{5}{8}\mathrm{e}^{-8} + \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{8}\right) \\ \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{21}{8} - \frac{5}{8}\mathrm{e}^{-8} \end{aligned}$$

Pour calculer l'aire du vantail il faut retrancher l'aire du vide de 0,05 m de haut 2 m de large et l'aire du vantail est égale à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - \mathcal{A}\text{ire du bord inférieur} \\ \mathcal{A} &= \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - 2 \times 0,05 \\ \mathcal{A} &= \frac{21}{8} - \frac{5}{8}\mathrm{e}^{-8} - 0,1 \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\mathcal{A} \approx 2,52\ \mathrm{m}^2}$$

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

1. Donner l'aire de la planche numéro k.

Les bords gauches des planches sont situés tous les $0,12+0,05=0,17$ m donc le bord gauche de la planche numéro k est situé à l'abscisse $0,17\times k$.
L'ordonnée du point d'abscisse $0,17k$ est $f(0,17k)$ mais comme chaque planche est située à une hauteur de 0,05 m du sol, la hauteur de la planche numéro k est de $f(0,17k)-0,05$ en mètres.

Chaque planche a une largeur de 0,12 m donc l'aire de la planche numéro k est, en m^2, égale à

$$\boxed{\big(f(0,17k)\ \ -0,05\big)\times 0,12}$$

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

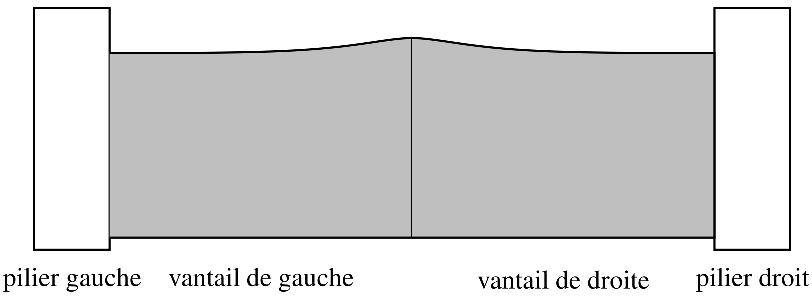
L'algorithme suivant calcule la somme des aires des planches du vantail de droite :

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant Que** $X+0,17<2,05$
	S prend la valeur $S+0,12\,(f(X)-0,05)$
	X prend la valeur $X+0,17$
	Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S

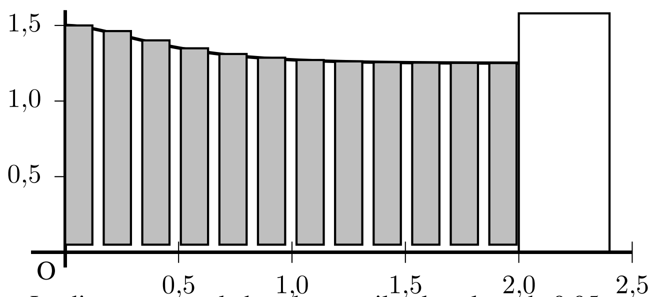
Dans cet algorithme, S désigne la somme des aires des planches du vantail de droite, et X désigne l'abscisse du bord gauche de chaque planche. Comme la largeur d'une planche est de 0,12 m, il ne faut pas que l'abscisse X du bord gauche de la dernière planche soit supérieure à $2-0,12$; il faut donc faire tourner la boucle « Tant que $X+0,12<2$ », autrement dit « Tant que $X+0,17<2,05$ ».

ANNEXE

Annexe 1 de l'exercice 4



Annexe 2 de l'exercice 4



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m.