Baccalauréat 2014 - S
Nouvelle Calédonie

Série S Obligatoire
Vendredi 7 Mars 2014
Correction

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous les candidats

1. $\boxed{\text{Réponse b}}$ **: $4\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\pi}$**

   Le nombre $1+\mathrm{i}$ a pour écriture complexe $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$ donc le nombre $(1+\mathrm{i})^4$ a pour écriture complexe $\left(\sqrt{2}\right)^4\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,4\frac{\pi}{4}}=4\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\pi}$.

2. $\boxed{\text{Réponse c}}$ **: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$**

   Si on appelle A le point d'affixe $1-\mathrm{i}$, l'équation :

$$|z-1+\mathrm{i}|=\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right| \iff |z-z_A|=\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|$$

   soit

$$|z-z_A|^2=\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|^2 \iff |z-z_A|^2=4$$

3. $\boxed{\text{Réponse c}}$ **: la suite (U_n) définie par $U_n=|Z_n|$ est convergente.**

$$Z_{n+1}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}Z_n \Longrightarrow |Z_{n+1}|=\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}Z_n\right| \iff |Z_{n+1}|=\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right|\times|Z_n| \iff |Z_{n+1}|=\frac{\sqrt{2}}{2}|Z_n|$$

   Donc la suite $U_n=|Z_n|$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; or $-1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$ donc la suite est convergente et a pour limite 0.

4. $\boxed{\text{Réponse c}}$ **: ABC est rectangle en A.**

   AB$=|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}|=\sqrt{10}$; AC$=2\sqrt{10}$ et BC$=5\sqrt{2}$; BC$^2=$ AB$^2+$ AC^2 donc le triangle ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice 2. 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha\ :\ X\ :\ \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

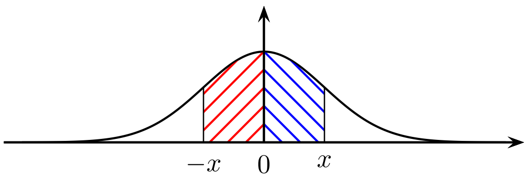
Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction f représente la fonction de densité de probabilité pour la loi normale centrée réduite.

2. $H(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$; et d'après le cours $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$.

3. D'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Mais la fonction f est positive donc $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est l'aire du domaine hachuré en rouge sur la figure ci-dessous, tandis que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est l'aire du domaine hachuré en bleu.



De plus la fonction f est paire, donc ces deux aires sont égales.

Enfin $H(x)$ est l'aire du domaine situé sous la courbe représentant f hachuré en rouge et en bleu sur la figure.

Donc $H(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

4. On sait que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ a pour dérivée la fonction f ; donc la fonction H définie par $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ a pour dérivée la fonction $2f$.

Or $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$; comme $H' = 2f$, $H'(x) > 0$ pour tout réel x, et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On établit le tableau de variations de H sur $[0\,;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$H'(x)$	$+$	
$H(x)$	0 ↗	1

5. En prenant α dans l'intervalle $]0\,;1[$, on a aussi $1-\alpha$ dans l'intervalle $]0\,;1[$; on complète le tableau de variations de H :

x	0	χ_α	$+\infty$
$H(x)$	0	$1-\alpha$	1

D'après le tableau de variations, il existe un réel strictement positif unique noté χ_α tel que $H(\chi_\alpha) = 1-\alpha$, donc tel que $P(-\chi_\alpha\ :\ X\ :\ \chi_\alpha) = 1-\alpha$.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'événement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A est $P_D(A)$.

$$P_D(A) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\times P_A(D)}{P(D)} = \frac{0,6\times 0,046}{0,05}$$

donc

$$\boxed{P_D(A) = 0,552}$$

2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D) \iff 0,05 = 0,6\times 0,046 + P(B\cap D) \iff 0,05 - 0{,}027\,6 = P(B\cap D)$$

Donc

$$\boxed{P(B\cap D) = 0{,}022\,4}$$

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, la probabilité qu'une pipette présente un défaut est $P_B(D)$. Or

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P_B(D) = \frac{P(B\cap D)}{P(B)} = \frac{0{,}022\,4}{0,4} = 0,056$$

Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, le pourcentage de pipettes présentant un défaut est donc de $5,6\,\%$.

Partie C

1. On cherche la probabilité qu'une pipette prise au hasard soit conforme, soit $P(98 < X < 102)$, en sachant que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1{,}042\,4$.
À la calculatrice, on trouve à 10^{-4} près :

$$\boxed{P(98 < X < 102) \approx 0{,}949\,9}$$

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100 et on suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.
Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

2. a. Comme on peut supposer que les tirages sont indépendants,
la variable aléatoire Y_n suit **une loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n \geqslant 100}$ et $\boldsymbol{p = 0,05}$**.

2. b. On sait que $n \geqslant 100$ donc $n \geqslant 30$.

$n \geqslant 100$ et $p = 0,05$ donc $np \geqslant 100 \times 0,05 \iff np \geqslant 5$

$p = 0,05$ donc $1 - p = 0,95$; $n(1-p) \geqslant 100 \times 0,95 \iff n(1-p) \geqslant 95$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Les trois conditions sont vérifiées.

2. c. Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non conformes dans un échantillon est :

$$\left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,05\,(1-0,05)}}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,05\,(1-0,05)}}{\sqrt{n}}\right]$$

soit

$$\boxed{\left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0{,}047\,5}}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0{,}047\,5}}{\sqrt{n}}\right]}$$

Exercice 3. 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

- **Limite en 0.**
  D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ \ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
- **Limite en $+\infty$.**
  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ \ln(x) = +\infty \text{ (par produit) donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
La fonction f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables :

$$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}$$

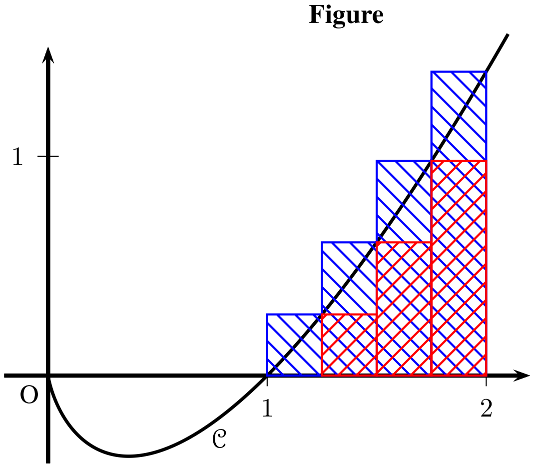
$$\boxed{\forall x \in]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = \ln(x) + 1}$$

3. Déterminer les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$: $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$
Donc :

- La fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ \mathrm{e}^{-1}]$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}\ ;+\infty[$.

Partie B

Figure



Algorithme

Variables
  k et n sont des entiers naturels
  U, V sont des nombres réels
Initialisation
  U prend la valeur 0
  V prend la valeur 0
  n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
  Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
  Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
  Afficher U
  Afficher V

1. 1. a. Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
Sur la figure ci-dessus, le nombre U représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge) ; cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre V représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en bleu) ; cette somme majore l'aire sous la courbe.

1. b. Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
On fait tourner l'algorithme ci-dessus :

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	0	0,069 8	4
	1	0,069 7	0,221 8	4
	2	0,221 7	0,466 7	4
	3	0,466 6	0,813 2	4
Affichage	On affiche la valeur de U : 0,466 6			
	On affiche la valeur de V : 0,813 2			

1. c. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.
On peut donc en déduire que $0{,}466\,6 < \mathcal{A} < 0{,}813\,2$.

2. On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant V_n$.

2. a. Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.
Sachant que

$$U_n = \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

et que

$$V_n = \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + f(2)\right]$$

on peut dire que

$$V_n - U_n = \frac{1}{n}\left(f(2) - f(1)\right) = \frac{2\ln(2) - 0}{n} = \frac{2\ln(2)}{n}$$

$$V_n - U_n < 0,1 \iff \frac{2\ln(2)}{n} < 0,1 \iff 2\ln(2) < 0,1\,n \iff \frac{2\ln(2)}{0,1} < n$$

Or

$$\frac{2\ln(2)}{0,1} \approx 13,86$$

donc **le plus petit entier n tel que $V_n - U_n$ soit inférieur à 0,1 est 14**.
Vérification : $V_{13} - U_{13} \approx 0,107 > 0,1$ et $V_{14} - U_{14} \approx 0,099 < 0,1$.

2. b. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?
Pour obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$ dans l'algorithme, il suffit d'entrer 14 comme valeur de n ; autrement dit, au lieu de « n prend la valeur 4 », on entrera « n prend la valeur 14 ».

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,;\; F'(x) = \frac{2x}{2}\times\ln(x) + \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = x\ln(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln(x) = f(x)$$

$$\boxed{\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,;\; F'(x) = f(x)}$$

Donc **F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.**

2. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

La fonction f est croissante sur $[1\,;2]$ et $f(1)=0$ donc la fonction f est positive sur $[1\,;2]$; on peut donc dire que

$$\mathcal{A}=\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\mathcal{A}=\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}\,t=F(2)-F(1)=(2\ln(2)-1)-\left(-\frac{1}{4}\right)$$

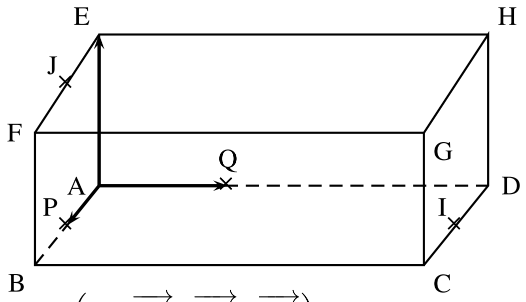
soit

$$\boxed{\mathcal{A}=2\ln(2)-\frac{3}{4}}$$

Exercice 4. 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1. On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB]. On note Q le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.



L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

Les points A, B et I appartiennent au plan (ABC) ; comme J est sur l'arête [EF] qui est strictement parallèle au plan (ABC), le point J n'appartient pas au plan (ABC).

Donc **les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires**.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].

- Le plan médiateur (P_1) du segment [AB] est le plan perpendiculaire à [AB] passant par le milieu P de [AB] ; c'est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ soient orthogonaux.
- Dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on a facilement $\mathrm{A}(0\,;0\,;0)$ et $\mathrm{B}(2\,;0\,;0)$, donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}$
- Le point M a pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$ et le point P a pour coordonnées $(1\,;0\,;0)$, donc $\boxed{\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{PM}} = 0$ or

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{PM}} = 0 \iff (x-1)\times 2 + y\times 0 + z\times 0 = 0 \iff x-1=0$$

  Donc l'équation du plan (P_1) est : $\boxed{(P_1)\quad :\quad x-1=0}$
- **Remarque** :
  Une méthode bien plus rapide consistait à dire que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (PIJ) et que les trois points P, I et J ont pour abscisse 1 ; donc une équation du plan (PIK) est $x=1$.

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y-z-4=0$.

- On a $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$; or le point Q a pour coordonnées $(0\,;1\,;0)$ donc le point D a pour coordonnées $(0\,;3\,;0)$.
- De plus $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$; or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$. De ce fait : $\boxed{C\,(0\,;3\,;0)}$.
- Le point I est le milieu de [CD] donc le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+2}{2}\,;\dfrac{3+3}{2}\,;\dfrac{0+0}{2}\right)$ soit $\boxed{I\,(1\,;3\,;0)}$.
- On calcule de même les coordonnées du point J, milieu de [EF], et on trouve $\boxed{J\,(1\,;0\,;1)}$
- Un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient au plan médiateur de [IJ] si et seulement si IM = JM soit $\mathrm{IM}^2 = \mathrm{JM}^2$.

Or on a :

$$\begin{aligned} IM^2 = JM^2 &\iff (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \\ &\iff y^2 - 6y + 9 + z^2 = y^2 + z^2 - 2z + 1 \\ &\iff -6y + 2z + 8 = 8 \\ &\iff 3y - z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Le plan médiateur de [IJ] a pour équation $3y - z - 4 = 0$ donc c'est le plan (P_2).

4. **4. a. Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.**

- Le plan (P_1) d'équation $x - 1 = 0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1\,;0\,;0)$.
- Le plan (P_2) d'équation $3y - z - 4 = 0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $(0\,;3\,;-1)$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles.

Les plans (P_1) et (P_2) sont donc sécants.

4. b. Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique sera donnée

Pour déterminer la droite d'intersection des plans (P_1) et (P_2), on résout le système

$$\left\{\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ 3y - z - 4 &= 0 \end{aligned}\right. \text{ que l'on peut écrire sous la forme } \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = y \\ z = 3y - 4 \end{array}\right.$$

Donc la droite (Δ) d'intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique :

$$\boxed{(\Delta)\ :\ \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}}$$

4. c. Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que ΩA = ΩI.

Un point de (Δ) a pour coordonnées $(1\,;t\,;3t-4)$ où t est un réel.

On va donc chercher une valeur de t pour laquelle ΩA = ΩI, le point Ω étant un point de (Δ), autrement dit pour laquelle $\Omega A^2 = \Omega I^2$.

$$\begin{aligned} \Omega A^2 = \Omega I^2 &\iff (-1)^2 + (-t)^2 + (-3t+4)^2 = (1-1)^2 + (3-t)^2 + (-3t+4)^2 \\ &\iff 1 + t^2 = 9 - 6t + t^2 \\ &\iff 6t = 8 \\ &\iff t = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Le point Ω de (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$, correspond au paramètre $t = \dfrac{4}{3}$ et a donc pour coordonnées $\left(1\,;\dfrac{4}{3}\,;3\times\dfrac{4}{3} - 4\right)$ c'est-à-dire

$$\boxed{\Omega\left(1\,;\frac{4}{3}\,;0\right)}$$

4. d. Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

- Le point Ω appartient à la droite (Δ) donc il appartient à la fois à (P_1) et à (P_2).
- (P_1) est le plan médiateur de [AB] et $\Omega \in (P_1)$ donc ΩA = ΩB.
- (P_2) est le plan médiateur de [IJ] et $\Omega \in (P_2)$ donc ΩI = ΩJ.
- De plus ΩA = ΩJ ; donc ΩA = ΩB = ΩI = ΩJ :

Le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.