Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - S Pondichéry

Série S Obli. et Spé.
17 Avril 2015

Math93.com : Annales et corrigé du Bac S - Dates et corrigés du bac S 2015

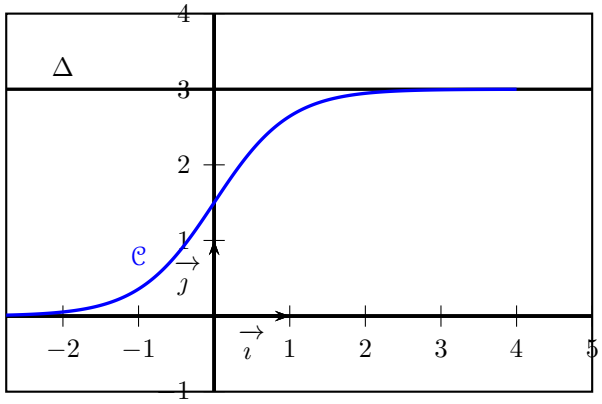
Exercice 1. — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

3. a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

3. b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

3. c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{cases}$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 2. — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier tenue u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.

2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

2. b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

2. c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

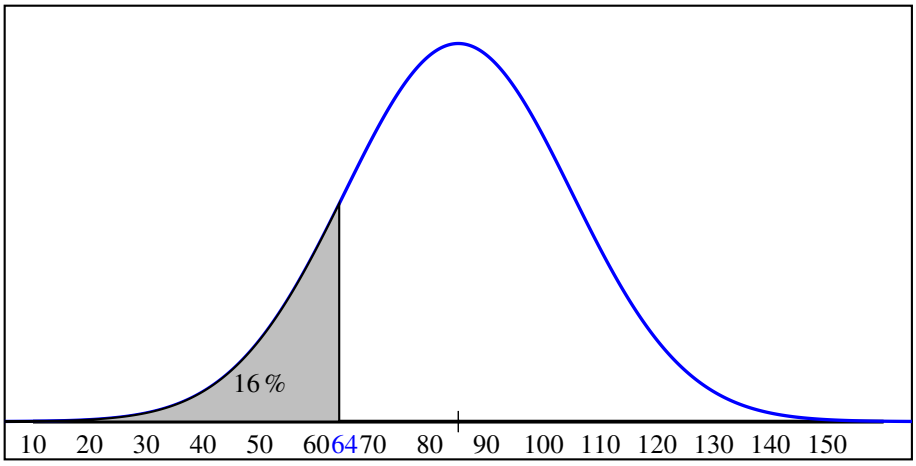
Exercice 3. 6 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1.

1. a. En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leq X \leq 104)$.

1. b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.

2. a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

2. b. Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

2. c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.

3. a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.

3. b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

1. a. Quelle est la probabilité qu' exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

1. b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.

On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

2. a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

2. b. Cette offre d'extension de garantie est -elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

Exercice 4. Obligatoire — 5 points

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives

$$\text{M}\left(1 ; 1 ; \frac{3}{4}\right), \text{N}\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right), \text{P}\left(1 ; 0 ; -\frac{5}{4}\right).$$

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

3. a. Exécuter à la main cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci- dessus.

3. b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

5. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}(5 ; -8 ; 4)$ normal au plan (MNP).

5. a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

5. b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

6. a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7} ; \frac{24}{35} ; \frac{23}{35}\right)$.

6. b. On donne $\text{FK} = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés nombres de Mersenne.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD$(b\ ;\ c) = 1$.
Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$\left(2^{33} - 1\right) \div 3$	2863311530
$\left(2^{33} - 1\right) \div 4$	2147483648
$\left(2^{33} - 1\right) \div 12$	715827883,6

Il affirme que 3 divise $\left(2^{33} - 1\right)$ et 4 divise $\left(2^{33} - 1\right)$ et 12 ne divise pas $\left(2^{33} - 1\right)$.

2. a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1.** ?

2. b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33} - 1\right)$.

2. c. En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $\left(2^{33} - 1\right)$.

2. d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

2. e. En déduire que 7 divise $\left(2^{33} - 1\right)$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD$(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD$(2^n - 1,\ k) \neq 0$ et $k < \sqrt{2^n - 1}$
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin de Tant que.
Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n - 1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

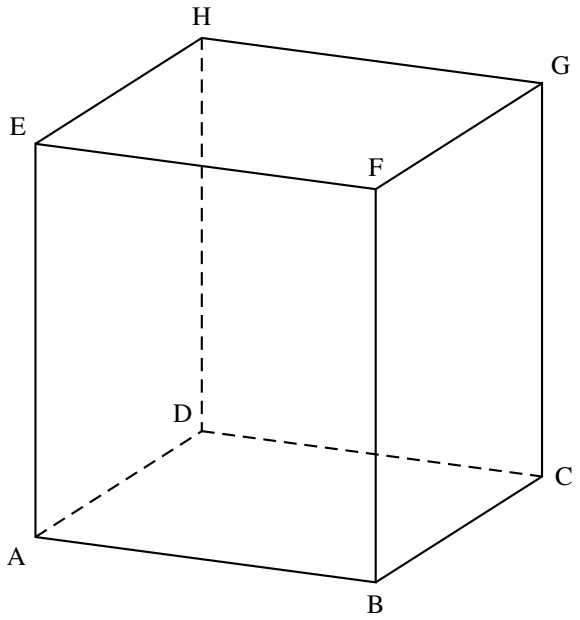
4. a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

4. b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

4. c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$