Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - S Liban

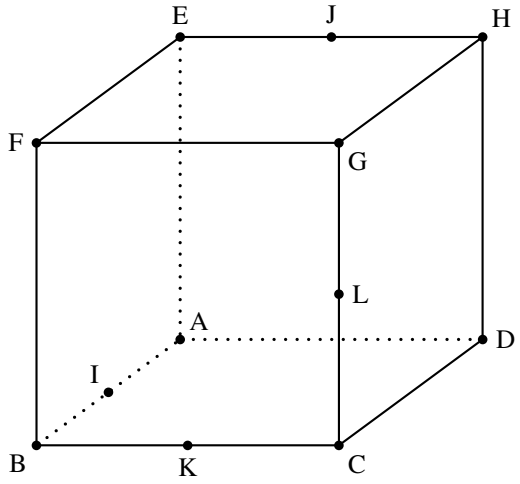
Série S Obli. et Spé.
27 Mai 2015

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Exercice 1. — 6 points

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

1. b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice 2. — 6 points

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2. b. En déduire la valeur exacte de u_1.

3.

3. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ...
	|Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

3. b. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4.

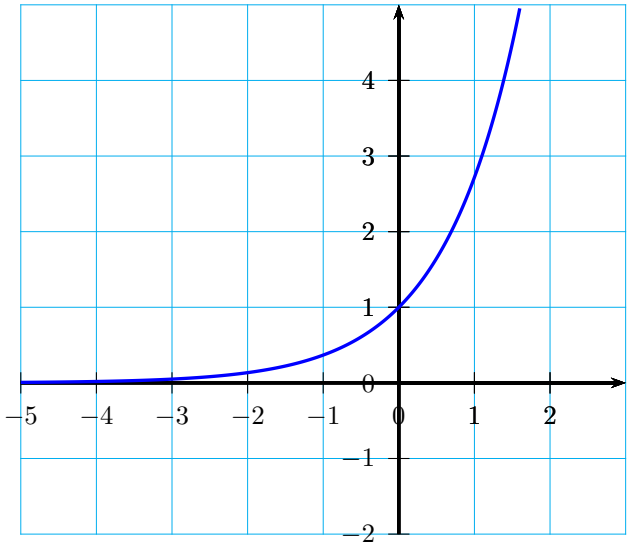
4. a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice 3. — 3 points

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.

Démontrer que la droite $\mathcal{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.

3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 4. Obligatoire — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2.

2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

2. b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.

4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

> 52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.
> *estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.

L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.

Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.

2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n :

$$X_n = M^n \times X_0$$

On définit les matrices A et B par

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

3. a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

3. b. Vérifier que $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

3. c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

3. d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

3. e. À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?