

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord 2 juin 2015

Exercice 1

Partie A

- On peut utiliser ici le théorème de Thalès pour prouver que $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$ et ainsi construire le point. Pour cela considérons le triangle SOB .
Nous savons que (DU) est parallèle à (OB) car D et U partagent la même cote et O et B sont également de même cote. Nous savons également que $\frac{OD}{OS} = \frac{1}{3}$, là encore en raison de la cote de D et S . On en déduit, par application de l'antique théorème, que $\frac{BU}{BS} = \frac{OD}{OS} = \frac{1}{3}$.
- Considérons les plans (AUE) et (BCS) . Ces plans sont sécants en la droite (UV) . Or, (BC) , incluse dans (BCS) , est parallèle à (AE) , incluse dans (AUE) ; puisque $ABCE$ est un carré. Par application du théorème du toit, on en déduit que (UV) est parallèle à (BC) . Cette dernière propriété permet de construire le point V .
- Il nous faut prouver d'une part que K appartient à (AE) et d'autre part que (KU) est perpendiculaire à (AE) .

On lit les coordonnées de $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et celles de $E \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on calcule ainsi $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'autre part

on détermine $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{6}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$, ce qui prouve que K est un point de $[AE]$.

Déterminons les coordonnées de U . On a démontré dans la question 1 que $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$, ce qui donne un système portant sur les coordonnées de U :

$$\begin{cases} x_u - 0 &= \frac{1}{3}(0 - 0) \\ y_u - 1 &= \frac{1}{3}(0 - 1) \\ z_u &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_u &= 0 \\ y_u &= \frac{2}{3} \\ z_u &= 1 \end{cases}$$

On peut maintenant déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{KU} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi, sachant que le repère est orthonormé : $\overrightarrow{KU} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{-5}{6} \times (-1) + \frac{5}{6} \times (-1) + 1 \times 0 = 0$, ce qui permet de conclure. Le point K est bien le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.



On pouvait également déterminer une équation paramétrique de (BS) afin de calculer les coordonnées de U . Une telle méthode revient à chercher le réel t tel que $\overrightarrow{BU} = t\overrightarrow{BS}$ avec la cote de U égale à 1.

Partie B

1. Il suffit de s'assurer que les points A , E et U vérifient bien l'équation proposée.

Pour le point A , on a bien $3 \times 1 - 3 \times 0 + 5 \times 0 - 3 = 0$.

De même pour le point E , il est clair que $3 \times 0 - 3 \times (-1) + 5 \times 0 - 3 = 0$.

Et enfin, pour le point U , on vérifie mentalement que $3 \times 0 - 3 \times \frac{2}{3} + 5 \times 1 - 3 = 0$.

Cette équation de plan convient donc.

2. Puisque l'on a muni l'espace d'un repère orthonormé, on déduit de l'équation cartésienne proposée les coordonnées d'un vecteur normal au plan (EAU) . Notons $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ce vecteur.

C'est un vecteur directeur de (d) puisque (d) est orthogonale au plan (EAU) . À partir des coordonnées du point S et de celles de ce vecteur, on en déduit une équation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de ce point satisfont simultanément une équation paramétrique de (d) ainsi qu'une équation cartésienne du plan (EAU) . On cherche donc x , y , z et t tels que :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \\ 0 = 3x - 3y + 5z - 3 \end{cases}$$

À partir de l'équation cartésienne du plan, en substituant x , y et z on en déduit le système équivalent :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \\ 0 = 3(3t) - 3(-3t) + 5(3 + 5t) - 3 \end{cases}$$

La dernière équation permet de déterminer $t = \frac{-12}{43}$ et, par suite, on peut déterminer les coordonnées de $H \begin{pmatrix} -36 \\ 36 \\ 43 \\ 69 \\ 43 \end{pmatrix}$.

4. Le plan (EAU) coupe la pyramide $SABCE$ en un solide $ABUECV$ d'une part et une pyramide $SAUVE$ d'autre part. Il nous faut donc déterminer si ces deux solides ont le même volume; ce qui revient à déterminer si le volume de l'un des deux solides correspond à la moitié de celui de $SABCE$.

Or toutes les questions précédentes nous ont permis de rassembler des éléments permettant de calculer le volume de la pyramide $SAUVE$. Nous connaissons en effet l'aire de sa base

$$\mathcal{A}_{AUVE} = \frac{5\sqrt{43}}{18}. \text{ Reste à calculer sa hauteur } SH. \text{ On a ainsi :}$$

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{\left(\frac{-36}{43} - 0\right)^2 + \left(\frac{36}{43} - 0\right)^2 + \left(3 - \frac{69}{43}\right)^2} \\ &= \frac{12}{\sqrt{43}} \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $SAUVE$ est donc $\mathcal{V}_{SAUVE} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{AUVE} \times SH$, ce qui donne après calcul :

$$\mathcal{V}_{SAUVE} = \frac{10}{9}.$$

Pour finir, déterminons le volume de la grande pyramide $SABCE$. On peut, par application du théorème de Pythagore au triangle ABO rectangle en O prouver que $AB = \sqrt{2}$. Sa base a donc pour aire $AB^2 = 2$. D'autre part, sa hauteur est $SO = 3$. Le volume de la grande pyramide est donc $\mathcal{V}_{SABCE} = \frac{1}{3} AB^2 \times SO = 2$.

On constate que $\frac{1}{2} \mathcal{V}_{SABCE} \neq \mathcal{V}_{SAUVE}$, ce qui permet de conclure.

Exercice 2

1. a. On applique les formules de récurrence proposées en utilisant un petit programme fait à la calculatrice.

On obtient :

$$A_1 \begin{pmatrix} -4,8 \\ 1,4 \end{pmatrix} \quad A_2 \begin{pmatrix} -4,68 \\ -1,76 \end{pmatrix} \quad A_3 \begin{pmatrix} -2,688 \\ -4,216 \end{pmatrix}$$



Ceux qui font l'option mathématiques auront reconnu qu'on peut définir matriciellement la suite des coordonnées. C'est d'ailleurs comme cela que l'on peut rapidement calculer les termes de la suite à la calculatrice.

- b. Voir plus bas :

Variables :

i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :

x prend la valeur -3

y prend la valeur 4

Traitement :

Pour i allant de 0 à 20

Construire le point de coordonnées $(x ; y)$

t prend la valeur x

x prend la valeur $0,8 \times x - 0,6 \times y$.

y prend la valeur $0,6 \times t + 0,8 \times y$.

Fin Pour



L'erreur à ne pas commettre ici était d'utiliser x dans le calcul de y . En effet, à ce stade, x a déjà été modifié. C'est d'ailleurs pour cela que l'algorithme propose de stocker temporairement l'ancienne valeur de x dans la variable t .

- c. On a identifié les points sur l'annexe en fonction de leurs coordonnées. Ils semblent appartenir à un cercle de centre O et de rayon 5 .
2. a. Faisons une démonstration par récurrence puisque la suite z est définie par récurrence. Au rang 0 , $|z_0| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. La propriété est vérifiée. Pour tout entier p , supposons que $|z_p| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = 5$. Au rang $p+1$:

$$\begin{aligned}
|z_{p+1}| &= \sqrt{x_{p+1}^2 + y_{p+1}^2} \\
&= \sqrt{(0,8x_p - 0,6y_p)^2 + (0,6x_p + 0,8y_p)^2} \\
&= \sqrt{(0,8^2 + 0,6^2)x_p^2 + (0,6^2 + 0,8^2)y_p^2 + (0,8 \times 0,6 - 0,6 \times 0,8)x_p y_p} \\
&= \sqrt{x_p^2 + y_p^2}. \text{ Or, par hypothèse, } \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = 5. \text{ Donc :} \\
|z_{p+1}| &= 5
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée.

On a donc démontré que $u_0 = 5$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5$ entraîne $u_{n+1} = 5$; donc par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n = 5$; $u_n = |z_n| = 5$, ce qui prouve notre conjecture concernant le lieu des points.

b. Calculons, pour tout n , la forme algébrique de $e^{i\theta} z_n$:

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} z_n &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) (x_n + iy_n) \\
&= (0,8 + 0,6i)(x_n + iy_n) \\
&= (0,8x_n + 0,6i^2 y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)i \\
&= (0,8x_n - 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)i \\
&\text{On reconnaît les formules de récurrence de } x_{n+1} \text{ et } y_{n+1} : \\
e^{i\theta} z_n &= x_{n+1} + iy_{n+1} \\
&= z_{n+1}
\end{aligned}$$

c. z est une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$ sur des complexes. Comme cette notion n'est pas au programme, nous allons redémontrer la formule explicite.

Pour $n = 0$ la formule est bien sûr vraie. Supposons-la vraie pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque : $z_p = e^{ip\theta} z_0$.

Mais nous savons que $z_{p+1} = e^{i\theta} z_p = e^{i\theta} e^{ip\theta} z_0$. On a ainsi :

$$z_{p+1} = e^{ip\theta + i\theta} z_0 = e^{i(p+1)\theta} z_0.$$

On a donc $z_0 = e^{i \times 0 \times \theta} z_0$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$, $z_p = e^{ip\theta} z_0$ entraîne $z_{p+1} = e^{i(p+1)\theta} z_0$; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel n , $z_n = e^{in\theta} z_0$.

d. Posons $\theta_0 = \arg(z_0)$. Par définition :

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \cos(\theta_0) + i \sin(\theta_0). \text{ Or : } \frac{z_0}{|z_0|} = \frac{-3}{5} + i \frac{4}{5}$$

$= -0,6 + i0,8$. On reconnaît les valeurs de cos et sin de θ :

$= -\sin(\theta) + i \cos(\theta)$. En utilisant les formules de trigonométrie, on a :

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

On a donc bien, en identifiant la première et la dernière ligne, $\arg(z_0) = \theta_0 = \frac{\pi}{2} + \theta$

 On pouvait également calculer la forme algébrique de $|z_0|e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)}$ et montrer qu'elle était identique à celle de z_0 . Cette méthode est d'ailleurs certainement plus « facile » à mettre en œuvre.

e. On utilise les propriétés de l'argument :

$$\arg(z_n) = \arg(e^{in\theta} z_0) = \arg(e^{in\theta}) + \arg(z_0) = n\theta + \frac{\pi}{2} + \theta = (n+1)\theta + \frac{\pi}{2}$$

On représente θ en utilisant le point A_0 . En effet, ce point vérifie $(\vec{i}; \overrightarrow{OA_0}) = \arg(z_0) = \theta + \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, on obtient facilement, par différence, que $(\vec{j}; \overrightarrow{OA_0}) = \theta$.

On a tracé θ en annexe en utilisant cette dernière remarque.

Pour obtenir A_{n+1} :

À partir du point A_n , on se déplace d'un angle θ sur le cercle de rayon 5 et de centre O pour obtenir A_{n+1} . Cette opération peut se faire à l'aide d'un compas en reportant une longueur correspondant à θ .

Exercice 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On obtient à l'aide de la calculatrice : $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2. On a $M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 12 & 20 & 21 \end{pmatrix} = M^3$.

3. On a donc :

$$M^3 = M^2 + 8M + 6I \iff M^3 - M^2 - 8M = 6I \iff M(M^2 - M - 8I) = 6I \iff M \times \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) =$$

I : cette égalité montre que l'inverse de la matrice M est la matrice $\frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

1. Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation de la parabole, d'où le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases} \iff (\text{matriciellement}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Le résultat précédent peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Or l'inverse de M est $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Partie C Retour au cas général

1. On a $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{6}q + \frac{1}{3}r \\ b = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q \\ c = a + \frac{1}{3}q - \frac{1}{3}r \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} 6a = -3p + q + 2r \\ 6b = 3p - 3q \\ 6c = 6p + 2q - 2r \end{cases} \iff \begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0 & [6] \\ 3p - 3q \equiv 0 & [6] \\ 6p + 2q - 2r \equiv 0 & [6] \end{cases}$$

2. Considérons la deuxième ligne du système :

$$3p - 3q \equiv 0 \quad [6] \iff 3(p - q) \equiv 0 \quad [6] \text{ ce qui signifie que } p - q \text{ doit être multiple de 2, soit } p - q \equiv 0 \quad [2].$$

Le double de la deuxième ligne du système ajoutée à la troisième donne :

$$4q + 2r \equiv 0 \quad [6] \iff 2(2q + r) \equiv 6 \quad [6], \text{ d'où } 2q + r \text{ doit être multiple de 3, soit } 2q + r \equiv 0 \quad [3].$$

Mais $2 \equiv -1 \quad [3]$ entraîne $2q \equiv -q \quad [3]$, donc

$$2q + r \equiv 0 \quad [3] \iff -q + r \equiv 0 \quad [3].$$

$$\text{Finalement on a le système } \begin{cases} q - r \equiv 0 & [3] \\ p - q \equiv 0 & [2] \end{cases}.$$

3. a. A, B et C alignés si et seulement si $C \in AB \iff \overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Or $\overrightarrow{AB}(-2; q - p)$ et $\overrightarrow{AC}(1; r - p)$. Donc :

$$\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} 1 & = & -2\alpha \\ r - p & = & \alpha(q - p) \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{-2} = \frac{r - p}{q - p} \Rightarrow$$

$$q - p = -2(r - p) \iff q - p = -2r + 2p \iff 3p - q - 2r = 0.$$

b. On choisit $p = 7$, on a donc $7 - q \equiv 0 \quad [2]$, on déduit que $q = 7 + 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Or $q - r \equiv 0 \quad [3] \iff 7 + 2k - r \equiv 0 \quad [3]$, c'est-à-dire $r = 7 + 2k + 3l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.

Comme les points ne sont pas alignés :

$$3p - q - 2r \neq 0 \iff 21 - 7 - 2k - 14 - 4k - 6l \neq 0 \iff -6k - 6l \neq 0 \iff -6(k + l) \neq 0 \iff k + l \neq 0.$$

Prenons simplement $k = l = 1$, d'où $q = 9$ et $l = 12$.

$$\text{L'égalité } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ permet de trouver } a = 2, \quad b = -1, \quad c = 6.$$

Exercice 3

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

- À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(98 \leq X \leq 102) \simeq 0,9545$ à 10^{-4} près.
- Centrons et réduisons l'évènement afin d'obtenir l'intervalle équivalent portant sur la variable centrée réduite :

$$98 \leq X \leq 102 \iff 98 - 100 \leq X - 100 \leq 102 - 100$$

$$\iff \frac{-2}{\sigma} \leq \frac{X - 100}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}$$

Posons $Z = \frac{X - 100}{\sigma}$. Nous savons que $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$ et que $P\left(\frac{-2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 2P\left(Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) - 1$.

Cherchons u tel que $2P(Z \leq u) - 1 = 0,97$, soit $P(Z \leq u) = 0,985$. À la calculatrice, on obtient $u \simeq 2,1701$ à 10^{-4} près.

Ainsi, $\frac{2}{\sigma} = u$, ce qui donne $\sigma = \frac{2}{u} \simeq 0,9216$ à 10^{-4} près.



Il faut absolument retenir le lien entre la probabilité sur un intervalle centré $P(Z \in [-u_\alpha; u_\alpha]) = 1 - \alpha$ et la valeur de la fonction de répartition :

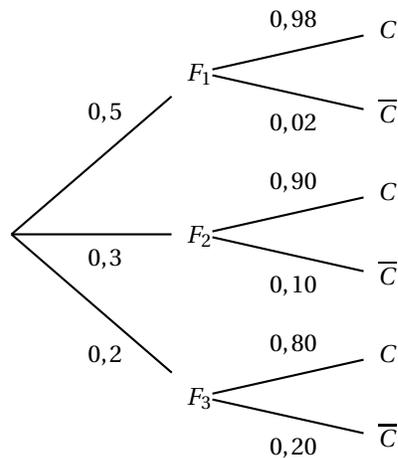
$$P(Z \leq u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

On peut retrouver rapidement cette formule en faisant un petit dessin permettant de déterminer les probabilités des queues de distribution, toutes deux égales à $\frac{\alpha}{2}$.

Partie B Contrôle à la réception

1. On cherche à déterminer $P_C(F_1) = \frac{P(C \cap F_1)}{P(C)}$.

Faisons un arbre afin de modéliser la situation. On donne les probabilités à partir des hypothèses de l'énoncé.



Calculons $P(C)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

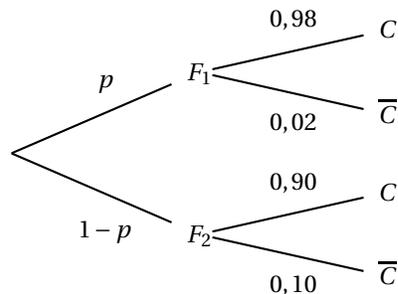
$$P(C) = P_{F_1}(C)P(F_1) + P_{F_2}(C)P(F_2) + P_{F_3}(C)P(F_3)$$

On obtient, après calcul, $P(C) = 0,92$.

D'autre part, $P(C \cap F_1) = P_{F_1}(C)P(F_1)$, ce qui donne, après calcul, $P(C \cap F_1) = 0,49$.

Finalement, on obtient $P_C(F_1) = \frac{0,49}{0,92} \approx 0,5326$ à 10^{-4} près.

2. Faisons un arbre qui résume la nouvelle situation :



En reprenant la formule des probabilités totales, on cherche p tel que $P(C) = 0,92$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} 0,98p + 0,9(1-p) &= 0,92 \iff 0,08p = 0,02 \\ &\iff p = \frac{0,02}{0,08} = 0,25 \end{aligned}$$

L'entreprise doit donc acheter au minimum 25% de ses fèves au premier fournisseur.

Exercice 4**Partie A**

1. La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x - 3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0; +\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.



On pouvait également dériver la fonction u et constater que la dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

2. Remarquons que la fonction \ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.

Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(e) = 1$ car $e > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.

D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.

Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.

0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $]2 ; 3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0 ; +\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0 ; +\infty[$.



Ici, on pouvait également expliquer que l'on constate à la calculatrice que $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$. Mais cet argument est nettement moins satisfaisant d'un point de vue du raisonnement.

3. Compte-tenu du sens de variation de u , on a :

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$		-	+

Partie B

1. Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit

que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

2. a. f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$.
Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 : \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \\ &= \frac{1}{x^2}u(x) \end{aligned}$$

- b. Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u . On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0 ; \alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

Partie C

1. Un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = \ln(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = \ln(x) \\ f(x) = \ln(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = \ln(x) \\ 0 = f(x) - \ln(x) \end{cases}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
 f(x) - \ln(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x). \text{ On réduit au dénominateur } x : \\
 &= \frac{1}{x} [(x-1)(\ln(x) - 2) + 2x - x\ln(x)] \\
 &= \frac{1}{x} [x\ln(x) - 2x - \ln(x) + 2 + 2x - x\ln(x)] \\
 &= \frac{1}{x} (2 - \ln(x))
 \end{aligned}$$

Or $2 - \ln(x) = 0$ n'a qu'une solution qui est $x = e^2$.

Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x = e^2$ et d'ordonnée $y = \ln(e^2) = 2$.

2. On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln(x)}{x} dx \\
 &= 2 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} dx
 \end{aligned}$$

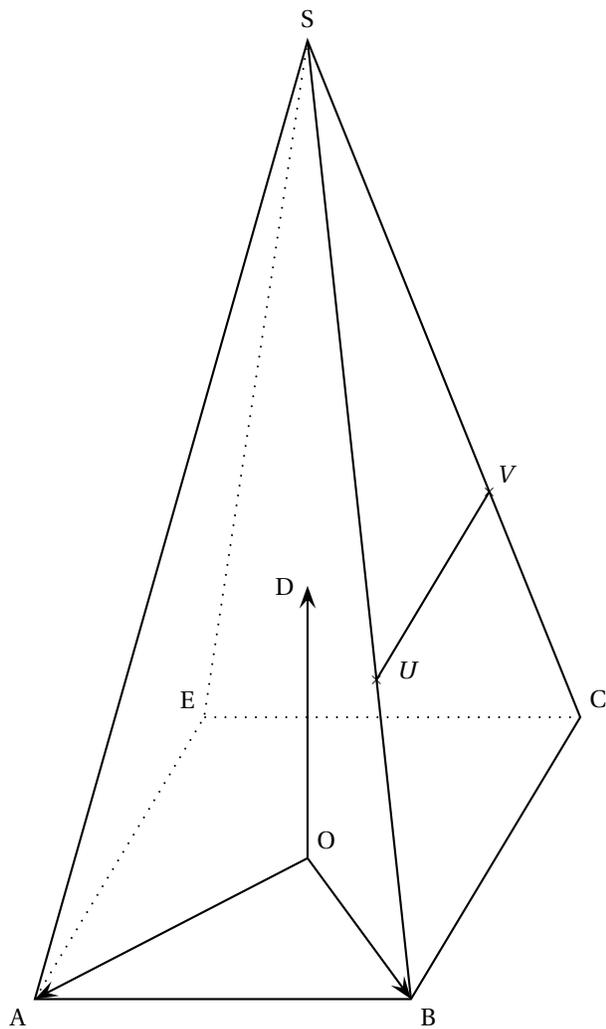
Or \ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et H est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 I &= 2 [\ln(x)]_1^{e^2} - [H(x)]_1^{e^2} \\
 &= 2 (\ln(e^2) - \ln(1)) - \frac{1}{2} (\ln(e^2)^2 - \ln(1)^2) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

L'aire délimitée par \mathcal{C} , \mathcal{C}' , et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$ est donc égale à 2.

Annexe

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)

