Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - S Amérique du Nord

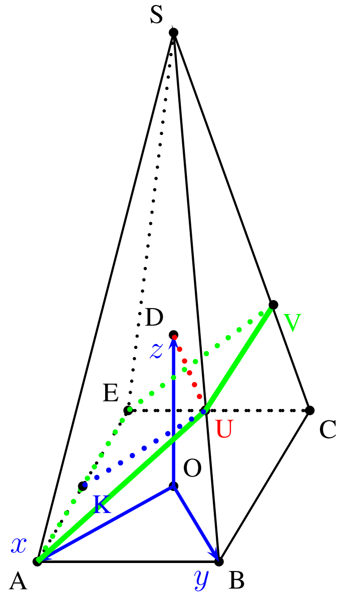
Série S Obli. et Spé.
2 Juin 2015
Correction

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Exercice 1. Géométrie dans l'espace — 5 points



Commun à tous les candidats

$SABCE$ est une pyramide à base carré $ABCE$ de centre O.
On se place dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right)$.
Le point S a pour coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$ dans ce repère.

Partie A

1. **Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire U.**
   On construit pour cela la parallèle à (OB) passant par D. Elle coupe (SB) en U.

2. **Soit V le point d'intersection du plan (AEU) avec la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire V.**
   On remarque que par construction, la droite (UV) est la droite d'intersection des plans (AEU) et (SBC).

> **Propriété 1** (Parallélisme d'une droite et d'un plan)
>
> Si une droite (d) est parallèle à une droite (d_2) d'un plan $(\mathscr{P})$, alors la droite (d) est parallèle au plan $(\mathscr{P})$.

> **Théorème 1** (Théorème du toit)
>
> Si une droite (d) est parallèle à deux plans sécants, alors (d) est parallèle à la droite d'intersection des deux plans.

- La droite (BC) est parallèle au plan (AEU). En effet, (BC) est parallèle à la droite (AE) du plan (AEU) (puisque $ABCE$ est un carré) donc d'après la propriété 1, elle est bien parallèle au plan (AEU).
- La droite (BC) est parallèle au plan (BCS) car elle y appartient (définition).
- Donc d'après le *théorème du toit*, puisque la droite (BC) est parallèles aux plans (AEU) et (BCS) sécants en (UV), elle est parallèles à la droite d'intersection des deux plans.
- **Conclusion** : les droites (UV) et (BC) sont parallèles.

3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\ ;\ 0\right)$.

Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

Dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(1\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ E\,(0\ ;\ -1\ ;\ 0) \\ S\,(0\ ;\ 0\ ;\ 3) \\ B\,(0\ ;\ 1\ ;\ 0) \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$$

- **Déterminons les équations des droites (AE) et (SB).**
La droite (AE) passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AE}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AE}$. On a alors :

$$(AE) = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad ,\quad t\in\mathbb{R}\right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (AE) est donc :

$$\boxed{(AE)\ :\ \left\{\begin{array}{l} x=-t+1 \\ y=-t \\ z=0 \end{array}\right. \quad ,\quad t\in\mathbb{R}}$$

La droite (SB) passant par le point B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BS}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{BM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BS}$. On a alors :

$$(SB) = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-0\\y-1\\z-0\end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} \quad ,\quad k\in\mathbb{R}\right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (SB) est donc :

$$\boxed{(SB)\ :\ \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-k+1 \\ z=3k \end{array}\right. \quad ,\quad k\in\mathbb{R}}$$

- On vérifie alors facilement, que pour $t=\frac{1}{6}$, le point K appartient à la droite (AE).
- **Déterminons les coordonnés du point U.**
Le point U est le point de la droite (SB) de cote 1 donc avec l'équation de (SB) :

$$z=1 \Longleftrightarrow k=\frac{1}{3}$$

On obtient donc :

$$\boxed{U\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\right)}$$

©ISSN 2272-5318

- Il reste alors à vérifier que le triangle AKU est rectangle en K ce qui est aisé avec le produit scalaire par exemple. Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OD}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(1\,;\,0\,;\,0) \\ K\left(\dfrac{5}{6}\,;\,-\dfrac{1}{6}\,;\,0\right) \\ U\left(0\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)\end{array}\right. \;\Bigg|\; \Longrightarrow \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{6}\\ -\dfrac{1}{6}\\ 0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KU}\begin{pmatrix}-\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{5}{6}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{6}\\ -\dfrac{1}{6}\\ 0\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{KU}\begin{pmatrix}-\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{5}{6}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{5}{36}-\frac{5}{36}+0=0$$

- **Conclusion** : on a montré que le point K appartenait bien à la droite (AE) et que les droites (KU) et (AK) étaient perpendiculaires. Le point K est donc le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$

Partie B

Dans cette partie on admet que l'aire du quadrilatère $AUVE$ est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. **On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)$.**

Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.
Notons $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $3x-3y+5z-3=0$. On va montrer que les trois points distincts A, E, et U appartiennent à ce plan.
Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OD}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(1\,;\,0\,;\,0) \\ E\,(0\,;\,-1\,;\,0) \\ U\left(0\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{lll} 3\times1-3\times0+5\times0-3 & =0 & \Longrightarrow A\in(\mathcal{P}) \\ 3\times0-3\times(-1)+5\times0-3 & =0 & \Longrightarrow E\in(\mathcal{P}) \\ 3\times0-3\times\dfrac{2}{3}+5\times1-3 & =0 & \Longrightarrow U\in(\mathcal{P})\end{array}\right.$$

Le plan (EAU) a donc pour équation :

$$\boxed{(EAU)\ :\ 3x-3y+5z-3=0}$$

2. **Donner un représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) et passant par le point S.**

Propriété 2

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{u}=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}.\,\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

On sait ici que le plan (EAU) a pour équation :

$$(EAU)\ :\ 3x-3y+5z-3=0$$

Donc d'après la propriété 2, un vecteur normal à ce plan est par exemple :

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$$

La droite (d) orthogonale au plan (EAU) et passant par S admet donc par exemple $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur d'où :

$$(d) = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-3 \end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\ ,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc :

$$\boxed{(d)\ :\ \begin{cases} x = \ \ 3t \\ y = -3t \\ z = \ \ 5t+3 \end{cases}\ ,\ t \in \mathbb{R}}$$

3. Déterminer les coordonnées de H, le point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

La droite (d) est orthogonale au plan (EAU) donc elle n'est pas parallèle au plan. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU) on doit alors résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x-3y+5z-3=0 \\ x = \ \ 3t \\ y = -3t \\ z = \ \ 5t+3 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Pour cela on va injecter dans l'équation du plan les équations paramétriques de la droite.

$$3 \times 3t - 3 \times (-3t) + 5 \times (5t+3) - 3 = 0 \Longleftrightarrow 43t + 12 = 0 \Longleftrightarrow t = -\frac{12}{43}$$

On obtient donc pour $t = -\dfrac{12}{43}$ les coordonnées du point d'intersection H : $\boxed{H\left(-\dfrac{36}{43}\ ;\ \dfrac{36}{43}\ ;\ \dfrac{69}{43}\right)}$.

4. Le plan (EAU) partage la pyramide $(SABCE)$ en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

- Le solide $SEAUV$ est une pyramide de base le trapèze $AUVE$ et de hauteur SH d'après la question précédente. Son volume est les tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur associés.

  Sachant que l'on nous donne l'aire de$AUVE$ qui est de $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$ on a :

  $$\mathcal{V}_{SEAUV} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AUVE} \times SH = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{43}}{18} \times SH$$

  Or dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right)$ le calcul de longueurs avec les formules usuelles est légitime :

  $$\left\{ \begin{array}{l} S\,(0\ ;\ 0\ ;\ 3) \\ H\left(-\dfrac{36}{43}\ ;\ \dfrac{36}{43}\ ;\ \dfrac{69}{43}\right) \end{array} \right| \Longrightarrow \overrightarrow{SH}\begin{pmatrix} -\dfrac{36}{43} \\ \dfrac{36}{43} \\ -\dfrac{60}{43} \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\left|\overrightarrow{SH}\right|\right| = SH = \sqrt{\left(-\frac{36}{43}\right)^2 + \left(\frac{36}{43}\right)^2 + \left(-\frac{60}{43}\right)^2}$$

  $$\boxed{SH = \frac{12}{\sqrt{43}} \text{ u.l.}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{V}_{SEAUV} = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{43}}{18} \times \frac{12}{\sqrt{43}} = \frac{10}{9} \text{ u.v.}}$$

- Le volume de la pyramide $SABCE$ de base le carré $ABCE$ et de hauteur associée $OS = 3$ est donné par :

  $$\mathcal{V}_{SABCE} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCE} \times OS$$

  Le triangle OAB étant rectangle et isocèle en O, de côté 1, on a facilement $AB = \sqrt{2}$ et $\mathcal{A}_{ABCE} = AB^2 = 2$. Soit :

  $$\boxed{\mathcal{V}_{SABCE} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2 \text{ u.v.}}$$

- **Conclusion** : On a donc : $\mathcal{V}_{SABCE} \neq 2 \times \mathcal{V}_{SAUVE}$. Le plan (EAU) ne partage donc pas la pyramide en deux solides de même volume.

Exercice 2. Obligatoire — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$\begin{cases} x_0 &= -3 \\ y_0 &= 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,;\ \begin{cases} x_{n+1} &= 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} &= 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. On se place dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer les coordonnées des points A_0 A_1 et A_2.

- On a : $\boxed{A_0\,(-3\,;\,4)}$
- Pour $n = 0$ on a :

$$\begin{cases} x_1 &= 0,8x_0 - 0,6y_0 \\ y_1 &= 0,6x_0 + 0,8y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= 0,8\times(-3) - 0,6\times 4 \\ y_1 &= 0,6\times(-3) + 0,8\times 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= -4,8 \\ y_1 &= 1,4 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{A_1\,(-4,8\,;\,1,4)}$$

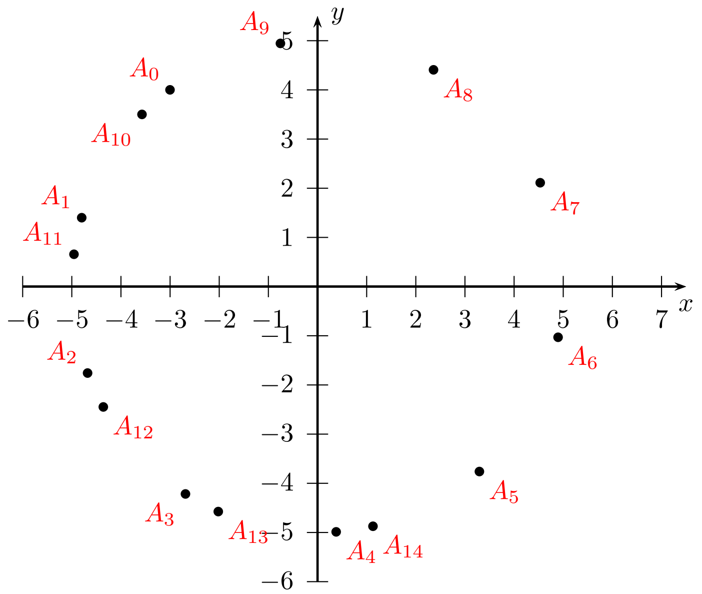
- Pour $n = 1$ on a :

$$\begin{cases} x_2 &= 0,8x_1 - 0,6y_1 \\ y_2 &= 0,6x_1 + 0,8y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 &= 0,8\times(-4,8) - 0,6\times 1,4 \\ y_2 &= 0,6\times(-4,8) + 0,8\times 1,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 &= -4,68 \\ y_2 &= -1,76 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{A_2\,(-4,68\,;\,-1,76)}$$

1. b. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

Variables :	i, x, y, t : nombres réels
Initialisation :	x prend la valeur -3
	y prend la valeur 4
Traitement :	Pour i allant de 1 à 20 faire :
	Construire le point de coordonnées $(x\,;\,y)$
	t prend la valeur x
	x prend la valeur $\boxed{0,8\times t - 0,6\times y}$ ou $\boxed{0,8\times x - 0,6\times y}$
	y prend la valeur $\boxed{0,6\times t + 0,8\times y}$
	Fin Pour

1. c. A l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant. Identifier les points A_0 A_1 et A_2.



Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les point A_n pour tout entier n ? On peut conjecturer que l'ensemble auquel appartiennent les point A_n pour tout entier n est un cercle de centre O et de rayon 5.

2. Dans le plan complexe, on nomme pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n$.

2. a. Soit $u_n = |z_n|$. montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$.
Démontrons ce résultat par récurrence sur n. Notons pour tout entier naturel n le postulat

$$(P_n) : u_n = 5$$

- **Initialisation** : On a
$$u_0 = |z_0| = |-3 + 4\,\mathrm{i}\,| = \sqrt{9+16} = 5$$
Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est donc vrai.
- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et donc que $u_n = 5$. Montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  - On a pour n entier :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= |z_{n+1}| \\ u_{n+1} &= |x_{n+1} + \mathrm{i}\,y_{n+1}| \\ u_{n+1} &= \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} \end{aligned}$$
Or pour tout entier n on a :
$$\begin{cases} x_{n+1} &= 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} &= 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{(0,8x_n - 0,6y_n)^2 + (0,6x_n + 0,8y_n)^2} \\ u_{n+1} &= \sqrt{0,64x_n^2 + 0,36y_n^2 - 0,96x_ny_n + 0,36x_n^2 + 0,64y_n^2 + 0,96x_ny_n} \\ u_{n+1} &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \\ u_{n+1} &= |z_n| \end{aligned}$$
Or d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 5 = |z_n|$ donc
$$u_{n+1} = |z_n| = 5$$
  - On a alors montré que $u_{n+1} = 5$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier n.
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 5}$$

Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
Puisque z_n est l'affixe du point A_n, on vient donc de prouver que pour tout entier n :
$$u_n = 5 = |z_n| = OA_n$$
Cela prouve que l'ensemble auquel appartiennent les point A_n pour tout entier n est un cercle de centre O et de rayon 5.

**2. b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos\theta = 0,8$ et $\sin\theta = 0,6$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n = z_{n+1}$.**

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\,;\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\,(x_n + \mathrm{i}\,y_n) && (1)\\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n &= (\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta) \times (x_n + \mathrm{i}\,y_n) && (2)\\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n &= (0,8 + 0,6\,\mathrm{i}\,) \times (x_n + \mathrm{i}\,y_n) && (3)\\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n &= 0,8x_n + 0,8\,\mathrm{i}\,y_n + 0,6\,\mathrm{i}\,x_n - 0,6y_n && (4)\\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n &= \underbrace{0,8x_n - 0,6y_n}_{x_{n+1}} + \mathrm{i}\,\underbrace{(0,6\,\mathrm{i}\,x_n + 0,8y_n)}_{y_{n+1}} && (5)\\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n &= x_{n+1} + \mathrm{i}\,y_{n+1} && (6) \end{aligned}$$

Soit :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n = z_{n+1}}$$

2. c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}\, z_0$.

Deux méthodes pour cette question, une directe ou une récurrence mais les suite complexes ne sont pas au programme.

Méthode 1 : en utilisant les suites complexes mais elles ne sont pas au programme !

On m'a confirmé (merci Damien) que les correcteurs ne valideraient pas cette preuve. A éviter donc .

On vient de montrer à la question **2b.** que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n = z_{n+1}$$

De ce fait, la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ et de premier terme z_0. De ce fait son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; z_n = z_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; z_n = z_0 \times \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = z_0 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}}$$

Méthode 2 : par récurrence, c'était la méthode à privilégier ici, pas de risque au bac !

On peut encore utiliser une récurrence sur n, plus long, mais plus sûr. Notons pour tout entier naturel n le postulat

$$(P'_n) : z_n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}\, z_0$$

- **Initialisation** : pour $n = 0$, le postulat (P'_0) est vrai car :

$$z_0 = 1 \times z_0 = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,0\times\theta} \times z_0$$

- **Hérédité**

  Supposons que pour n entier, (P'_n) soit vérifié : $z_n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}\, z_0$. Montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

  - On a montré lors de la question **2a.** que pour tout entier n ,

  $$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n = z_{n+1}$$

    Donc pour n entier :

  $$z_{n+1} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\, z_n$$

    Or d'après l'hypothèse de récurrence, $z_n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}\, z_0$ donc

  $$z_{n+1} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} \times \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}\, z_0\right)$$
  $$z_{n+1} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(n+1)\theta}\, z_0$$

  - On a alors montré que (P'_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**

  On a montré que (P'_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P'_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, $({P'}_{n+1})$ est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\;\; z_n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}\, z_0}$$

2. d. Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

On a vu que :

$$\begin{cases} z_0 & = -3 + 4\,\mathrm{i} \\ |z_0| & = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta & = 0,8 \\ \sin\theta & = 0,6 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
z_0 &= -3 + 4\,\mathrm{i} \\
z_0 &= 5 \times \left(\frac{-3}{5} + \frac{4}{5}\,\mathrm{i}\right) \\
z_0 &= 5 \times (-0,6 + 0,8\,\mathrm{i}\,) \\
z_0 &= 5 \times \,\mathrm{i}\, \times (0,8 + 0,6\,\mathrm{i}\,) \\
z_0 &= 5 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} \times (\cos\theta + \,\mathrm{i}\,\sin\theta) \\
z_0 &= 5 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}
\end{aligned}$$

Soit

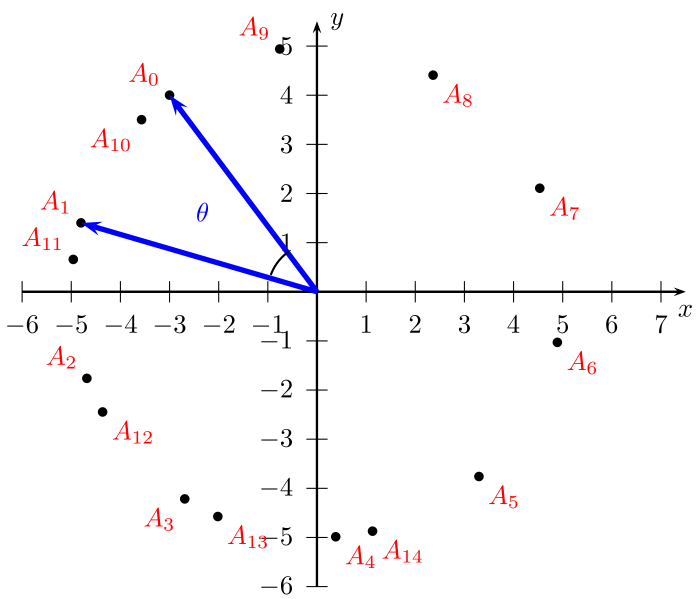
$$\boxed{z_0 = 5 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

Et donc $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0

2. e. Pour tout entier n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument de z_n. Représenter θ sur la figure.

- On a montré lors de la question **2c.** que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ z_n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}\, z_0$$
- Or on vient de prouver lors de la question **2d.** que : $z_0 = 5 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$.
Donc :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \ z_n &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}\, z_0\\ z_n &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta} \times 5 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\\ z_n &= 5 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}+n\theta\right)}\\ z_n &= 5 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left((n+1)\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \arg z_n = (n+1)\theta + \frac{\pi}{2}}$$

Expliquer, pour tout entier n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.
On a montré que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \arg z_n = (n+1)\theta + \frac{\pi}{2}$$
Donc, pour tout entier n on a :
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OA_n}\ ;\ \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) &= \arg z_{n+1} - \arg z_n + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ \left(\overrightarrow{OA_n}\ ;\ \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) &= (n+2)\theta + \frac{\pi}{2} - \left((n+1)\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ \left(\overrightarrow{OA_n}\ ;\ \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) &= \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$
On a donc montré que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \boxed{\begin{cases}\left(\overrightarrow{OA_n}\ ;\ \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) &= \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ OA_{n+1} &= OA_n = 5\end{cases}}$$
Pour construire A_{n+1} à partir du point A_n, il suffit donc d'effectuer une rotation de centre O et d'angle θ. Cet angle étant défini par exemple à partir des deux premiers points A_0 et A_1.



©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Spécialité Maths **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2.

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}}$$

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

Or

$$M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{M^3 = M^2 + 8M + 6I}$$

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

$$\begin{aligned} M^3 = M^2 + 8M + 6I &\iff M^3 - M^2 - 8M = 6I \\ &\iff M \times \left(M^2 - M - 8I\right) = 6I \\ &\iff M \times \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right) = I \end{aligned}$$

La matrice N définie par $N = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$ vérifie donc l'égalité $M \times N = I$. On sait que l'égalité $N \times M = I$ s'en déduit alors, ce qui prouve que M est inversible et que :

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)}$$

Partie B : Étude d'un cas particulier

1. Montrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que : $M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On cherche à déterminer trois réels a, b et c tels que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1\ ;\ 1)$, $B(-1\ ;\ -1)$ et $C(2\ ;\ 5)$. Or :

$$\left\{\begin{array}{lcll} A(1\ ;\ 1) \in \mathcal{P} & \iff & 1 & = a \times 1^2 + b \times 1 + c \\ B(-1\ ;\ -1) \in \mathcal{P} & \iff & -1 & = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c \\ C(2\ ;\ 5) \in \mathcal{P} & \iff & 5 & = a \times 2^2 + b \times 2 + c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a + b + c & = 1 \\ a - b + c & = -1 \\ 4a + 2b + c & = 5 \end{array}\right.$$

Or on a :

$$\left\{\begin{array}{ll} a + b + c & = 1 \\ a - b + c & = -1 \\ 4a + 2b + c & = 5 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que :

$$\boxed{M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier qu'ils sont entiers.

On a montré que la matrice M était inversible avec

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Or :

$$M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \underbrace{M^{-1} \times M}_{I} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff I \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

©ISSN 2272-5318

Partie C : Retour au cas général

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p\\ q\\ r\end{pmatrix}$, avec a, b et c entiers alors $\begin{cases} -3p+q+2r & \equiv 0\,[6]\\ 3p-3q & \equiv 0\,[6]\\ 6p+2q-2r & \equiv 0\,[6]\end{cases}$.

On a vu que $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ 6 & 2 & -2\end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p\\ q\\ r\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ 6 & 2 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} p\\ q\\ r\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3p+q+2r\\ 3p-3q\\ 6p+2q-2r\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases} a &= \dfrac{-3p+q+2r}{6}\\ b &= \dfrac{3p-3q}{6}\\ c &= \dfrac{6p+2q-2r}{6}\end{cases}\end{aligned}$$

Donc si a, b et c sont des entiers, cela implique que 6 divise les entiers $(-3p+q+2r)$, $(3p-3q)$ et $(6p+2q-2r)$.
De fait, leur reste modulo 6 est alors égale à zéro, on dit aussi qu'ils sont congrus à 0 modulo 6. On a bien montré que :

$$\boxed{\text{Si } \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p\\ q\\ r\end{pmatrix}, \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ entiers alors } \begin{cases} -3p+q+2r & \equiv 0\,[6]\\ 3p-3q & \equiv 0\,[6]\\ 6p+2q-2r & \equiv 0\,[6]\end{cases}}$$

2. En déduire que $\begin{cases} q-r & \equiv 0\,[3]\\ p-q & \equiv 0\,[2]\end{cases}$.

On a montré que si a, b et c sont entiers, alors $\begin{cases} -3p+q+2r & \equiv 0\,[6]\\ 3p-3q & \equiv 0\,[6]\\ 6p+2q-2r & \equiv 0\,[6]\end{cases}$.

- **Montrons que : $p-q \equiv 0\,[2]$.**
  <u>Méthode 1</u>
  La deuxième égalité de congruence, $3p-3q \equiv 0\,[6]$ peut s'écrire $3(p-q) \equiv 0\,[6]$ ce qui implique que 6 divise $3\times(p-q)$ et donc que $(p-q)$ est un multiple de 2. De ce fait, on a alors : $p-q \equiv 0\,[2]$
  On a montré l'implication :
  $$3(p-q) \equiv 0\,[6] \textit{ implique } (p-q) \equiv 0\,[2]$$
  <u>Méthode 2</u>
  On peut aussi appliquer la propriété suivant mais il faut la réécrire avec précision et savoir la redémontrer rapidement :

  Propriété 3 (Congruence et division)

  – (1) : Si d est un diviseur commun des entiers a, b et n, alors $a \equiv b\,[n]$ *implique* $\dfrac{a}{d} \equiv \dfrac{b}{d}\,\left[\dfrac{n}{d}\right]$
  – (2) : Si d divise n, alors $a \equiv b\,[n]$ *implique* $a \equiv b\,[d]$.

  Puisque $d = 3$ divise $3(p-q)$, 0 et 6, en appliquant le (1) de la propriété 3 on a l'implication :
  $$3(p-q) \equiv 0\,[6] \textit{ implique } (p-q) \equiv 0\,[2]$$

- **Montrons que : $q - r \equiv 0\,[3]$.**
  - **Méthode 1 : pas la plus rapide mais juste pour montrer un exemple de résolution de ce type !**
    On va ici appliquer les règles de compatibilité de la congruence avec les opérations.

Propriété 4 (Compatibilité avec les opérations)

Soit m un entier $m \geq 2$ et a, b, a', b' des entiers.

- (1) : Si $a \equiv b\,[m]$ et $a' \equiv b'\,[m]$, alors $a + a' \equiv b + b'\,[m]$
- (2) : Si $a \equiv b\,[m]$ et $a' \equiv b'\,[m]$, alors $a \times a' \equiv b \times b'\,[m]$
- (3) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $a \equiv b\,[m]$, alors $a^n \equiv b^n\,[m]$

On rappelle que :

$$\begin{cases} -3p + q + 2r & \equiv 0\,[6] \quad : (E_1) \\ 3p - 3q & \equiv 0\,[6] \quad : (E_2) \\ 6p + 2q - 2r & \equiv 0\,[6] \quad : (E_3) \end{cases}$$

On va alors en appliquant les (1) et (2) de la propriété 4, pouvoir additionner l'égalité (E_3) avec $2 \times (E_1)$. soit :

$$\left.\begin{cases} -6p + 2q + 4r & \equiv 0\,[6] \quad : \quad 2 \times (E_1) \\ 6p + 2q - 2r & \equiv 0\,[6] \quad : \quad (E_1) \end{cases}\right| \Longrightarrow 2 \times (E_1) + (E_2) \quad : \quad (-6p + 2q + 4r) + (6p + 2q - 2r) \equiv 0\,[6]$$

$$\Longrightarrow 4q + 2r \equiv 0\,[6]$$

Or on a $2 \equiv -4\,[6]$ donc :

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 4q + \underbrace{2r}_{-4r\,[6]} \equiv 0\,[6] \\ &\Longrightarrow 4q - 4r \equiv 0\,[6] \\ &\Longrightarrow 4 \times (q - r) \equiv 0\,[6] \end{aligned}$$

On ré-applique alors le raisonnement de la première question ou le (1) de la propriété 3.
Puisque $d = 2$ divise $4 \times (q - r)$, 0 et 6, alors on a l'implication :

$$4 \times (q - r) \equiv 0\,[6] \Longrightarrow 2 \times (q - r) \equiv 0\,[3]$$

Or puisque $2 \equiv -1\,[3]$ on obtient :

$$2 \times (q - r) \equiv 0\,[3] \Longrightarrow -q + r \equiv 0\,[3]$$

Ce qui nous donne le résultat obtenu en multipliant par $-1 \equiv -1\,[3]$

$$2 \times (q - r) \equiv 0\,[3] \Longrightarrow q - r \equiv 0\,[3]$$

  - **Méthode 2 : beaucoup plus rapide**
    On utilise directement la troisième égalité :

$$\left.\begin{cases} 6p + 2q - 2r & \equiv 0\,[6] \quad : (E_3) \\ 6p & \equiv 0\,[6] \end{cases}\right| \Longrightarrow 2q - 2r \equiv 0\,[6] \Longrightarrow 2 \times (q - r) \equiv 0\,[6]$$

On applique alors un raisonnement similaire à ce qui précède.
L'entier 6 divise $2 \times (q - r)$ donc $(q - r)$ est un multiple de 3. On a donc :

$$\boxed{(q - r) \equiv 0\,[3]}$$

- **Conclusion** : On a bien montré que

$$\boxed{\begin{cases} q - r & \equiv 0\,[3] \\ p - q & \equiv 0\,[2] \end{cases}}$$

3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q-r\equiv 0\,[3] \\ p-q\equiv 0\,[2] \\ A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}\end{cases}$ **alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ passe par les points A, B et C.**

3. a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r+q-3p=0$.

Dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$on a $A\,(1\ ;\ p)$, $B\,(-1\ ;\ q)$ et $C\,(2\ ;\ r)$.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires soit :

$$\begin{aligned} A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\ q-p\end{pmatrix} \text{ colinéaire } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ r-p\end{pmatrix} \\ &\iff -2\times(r-p) = (q-p) \\ &\iff 0 = 2r+q-3p \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\boxed{\text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés si et seulement si } 2r+q-3p=0.}$$

3. b. On choisit $p=7$. Déterminer les entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points A, B et C.
On admet que si

$$\begin{cases} q-r\equiv 0\,[3] \\ p-q\equiv 0\,[2] \\ A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}\end{cases}$$

alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points A, B et C.

- On choisit $\underline{p=7}$, et donc q tel que : $p-q\equiv 0\,[2]$ et donc $q=p+2k\ (k\in\mathbb{Z})$ soit

$$q = 7+2k\ (k\in\mathbb{Z})$$

- On a $q=7+2k\ (k\in\mathbb{Z})$ donc de l'égalité $q-r\equiv 0\,[3]$ on obtient $r=q+3k'\ (k'\in\mathbb{Z})$ soit :

$$r = 7+2k+3k'\ (k\in\mathbb{Z}\ ;\ k'\in\mathbb{Z})$$

- On doit maintenant choisir p et q tels que les points A, B et C ne soient pas alignés. Il faut donc d'après la question précédente que $2r+q-3p\neq 0$ soit :

$$\begin{aligned} 2r+q-3p\neq 0 &\iff 2\times(7+2k+3k')+7+2k-21\neq 0 \\ 2r+q-3p\neq 0 &\iff 14+4k+6k'+2k-14\neq 0 \\ 2r+q-3p\neq 0 &\iff 6k+6k'\neq 0 \\ 2r+q-3p\neq 0 &\iff k\neq -k' \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre des valeurs de k et k' non opposées, par exemple avec :

$$\begin{cases} k &= 0 \\ k' &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q &= 7+2k &= 7 \\ r &= 7+2k+3k' &= 10 \end{cases}$$

- Pour déterminer les entiers a, b et c il suffit alors d'utiliser la relation :

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p\\ q\\ r\end{pmatrix} \text{ avec } M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ 6 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- **Conclusion** : avec $p = 7$, on a bien déterminé les réels

$$\begin{cases} q & = 7 \quad (q = 7 + 2k\ ;\ k = 0) \\ r & = 10 \quad (r = 7 + 2k + 3k'\ ;\ k' = 1 \neq -k) \\ a & = 1 \\ b & = 0 \\ c & = 6 \end{cases}$$

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ soit ici celle d'équation $y = x^2 + 6$ passe alors par les points :

$A\,(1\ ;\ p = 7)$, $B\,(-1\ ;\ q = 7)$ et $C\,(2\ ;\ r = 10)$.

En effet on a :

x	1	-1	2
$y = x^2 + 6$	7	7	10

- Fin de l'exercice -

Complément : un autre exemple

Avec $p = 7$, et :

$$\begin{cases} q & = 11 \quad (q = 7 + 2k\ ;\ k = 2) \\ r & = 20 \quad (r = 7 + 2k + 3k'\ ;\ k' = 3 \neq -k) \\ a & = 5 \\ b & = -2 \\ c & = 4 \end{cases}$$

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ soit ici celle d'équation $y = 5x^2 - 2x + 4$ passe alors par les points :

$A\,(1\ ;\ p = 7)$, $B\,(-1\ ;\ q = 11)$ et $C\,(2\ ;\ r = 20)$.

En effet on a :

x	1	-1	2
$y = 5x^2 - 2x + 4$	7	11	20

Exercice 3. Probabilités — 4 points

Commun à tous les candidats

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. La masse de la tablette peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

Partie A

1. Calculer la probabilité de l'évènement M : « la tablette est mise sur le marché ».

La tablette est mise sur le marché si sa masse fait 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Avec les notation de l'exercice, cela correspond donc à l'évènement : $(98 \leq X \leq 102)$.
Or la variable X suit la loi normale de paramètre $\mathcal{N}\left(\mu = 100\ ;\ \sigma^2 = 1^2\right)$ donc :

$$P(98 \leq X \leq 102) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$$

On va alors appliquer la propriété des intervalles dite :

Propriété 5 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors :

$$\begin{array}{lcl} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683 & : & (1) \\ P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954 & : & (2) \\ P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997 & : & (3) \end{array}$$

On a donc ici d'après la relation (2) de la propriété 5, puisque $X \sim \mathcal{N}\left(\mu = 100\ ;\ \sigma^2 = 1\right)$:

$$\boxed{P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(98 \leq X \leq 102) \approx 0,954}$$

2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet évènement atteigne $0,97$. Déterminer la valeur de σ correspondante.

Propriété 6

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Puisque X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(100\ ;\ \sigma^2\right)$, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - 100}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
Donc :

$$\begin{aligned} P(98 \leq X \leq 102) &= P\left(\frac{98-100}{\sigma} \leq \frac{X-100}{\sigma} \leq \frac{102-100}{\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{2}{\sigma} \leq Y \leq \frac{2}{\sigma}\right) \\ P(98 \leq X \leq 102) &= 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

En effet par définition si Y suit une loi normale centrée réduite $P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$.
On cherche donc ici σ tel que :

$$P(98 \leq X \leq 102) = 0,97 \iff 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 1 = 0,97 \iff \boxed{\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = \frac{1,97}{2} = 0,985}$$

©ISSN 2272-5318

La calculatrice nous donne alors arrondi au millième :

$$\frac{2}{\sigma} \approx 2,170090$$

Soit

$$\boxed{\sigma \approx 0,922}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.985) \approx 2{,}170\,090\,375\,17$$

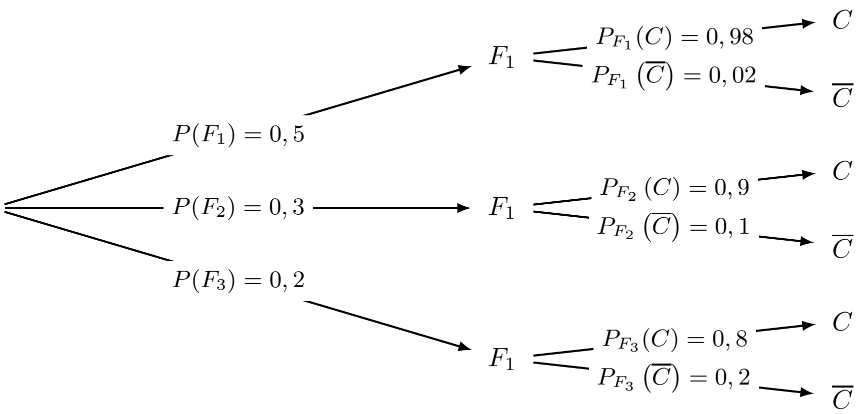
Partie B Contrôle à la réception

On note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i » et C l'évènement « la fève est conforme »

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. On arrondira à 10^{-2}.

Avec les notation de l'exercice, on peut représenter la situation à l'aide d'un arbre :

- $P(F_1) = 0,5$, $P(F_2) = 0,3$ et $P(F_3) = 0,2$ car « le premier fournisseur procure la moitié du stock, le deuxième 30% et le troisième le reste » ;
- $P_{F_1}(C) = 0,98$ car « 98% de la production du premier est conforme ».
- $P_{F_2}(C) = 0,90$ car « 90% de la production du deuxième est conforme ».
- $P_{F_3}(C) = 0,8$ car « le troisième produit 20% de fèves non conformes, donc 80% de conformes ».



La probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme est $P_C(F_1)$ soit :

$$P_C(F_1) = \frac{P(F_1 \cap C)}{P(C)}$$
$$P_C(F_1) = \frac{P_{F_1}(C) \times P(F_1)}{P(C)}$$

Or d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(C) = P_{F_1}(C) \times P(F_1) + P_{F_2}(C) \times P(F_2) + P_{F_3}(C) \times P(F_3)$$

D'où

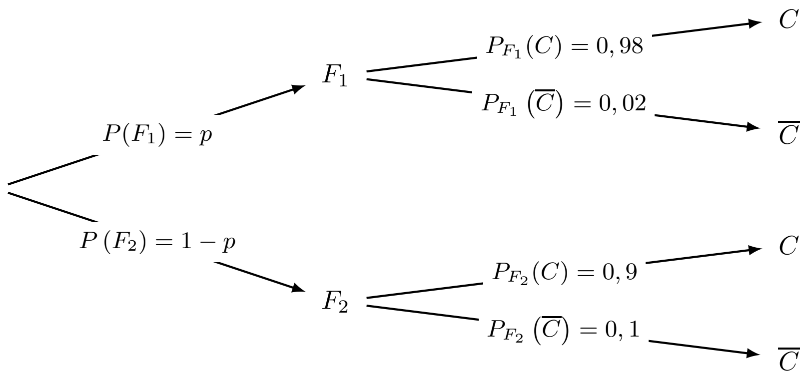
$$P_C(F_1) = \frac{P_{F_1}(C) \times P(F_1)}{P_{F_1}(C) \times P(F_1) + P_{F_2}(C) \times P(F_2) + P_{F_3}(C) \times P(F_3)}$$
$$P_C(F_1) = \frac{0,98 \times 0,5}{0,98 \times 0,5 + 0,9 \times 0,3 + 0,8 \times 0,2}$$

Soit arrondi au centième :

$$\boxed{P_C(F_1) = \frac{0,49}{0,92} \approx 0,53}$$

2. L'entreprise ne conserve que les fournisseurs 1 et 2. Elle souhaite que 92% de fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

En notant p la proportion de fèves du fournisseur 1, on a alors la situation suivante :



On cherche donc p pour que $P(C) = 0,92$. Or d'après la formule des probabilités totales s'écrit :

$$\begin{aligned}
&P(C) = P_{F_1}(C) \times P(F_1) + P_{F_2}(C) \times P(F_2) \\
&P(C) = 0,98 \times p + 0,9 \times (1-p) \\
&P(C) = 0,08p + 0,9
\end{aligned}$$

Donc pour que 92% des fèves soient conformes il faut que :

$$P(C) = 0,08p + 0,9 = 0,92 \Longleftrightarrow \boxed{p = \frac{0,02}{0,08} = 0,25}$$

il faut donc acheter <u>25% de fèves au fournisseur 1</u> et le reste au fournisseur 2.

Exercice 4. Fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

La fonction u est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\ ;\ u'(x) = (\ln x)' + (x-3)'$$
$$u'(x) = (\ln x)' + 1$$

Et par dérivation de la fonction logarithme sur $]0\,;\,+\infty[$: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$$\boxed{\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\ ;\ u'(x) = \frac{1}{x} + 1}$$

Or pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{1}{x}$ est strictement positif et donc

$$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\ ;\ u'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 1 > 0$$

La fonction u est bien croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 2 et 3.

Dressons le tableau de variation de la fonction u sur son $]0\,;\,+\infty[$. On a

$$u(2) = \ln 2 - 1 \approx -0,31\ ;\ u(3) = \ln 3 \approx 1,1$$

x	0	2	α	3	$+\infty$
$u'(x)$			$+$		
u		$f(2) \approx -0,31$	0	$f(3) \approx 1,1$	

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.
Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

- La fonction u est **continue** et **strictement croissante** sur $]0\,;\,+\infty[$ donc à fortiori sur l'intervalle $[2\,;\,3]$;
- L'image par u de l'intervalle $[2\,;\,3]$ est $[u(2)\,;\,u(3)]$ d'après le tableau de variations.
- On a $u(2) = \ln 2 - 1 \approx -0,31 < k = 0 < u(3) = \ln 3 \approx 1,1$

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $u(x) = k = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[2\,;\,3]$.

- Sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, la fonction admet un maximum strictement négatif, $f(2)$ donc l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution. De même sur l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$ la fonction admet un minimum strictement positif, $f(3)$ donc l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution.
- **Conclusion** : sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 2 et 3.

Remarque *: on pouvait aussi plus classiquement calculer les limites en 0 et $+\infty$ et appliquer le corollaire sur $]0\,;\,+\infty[$.*

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.
Le tableau de variation nous donne alors directement le signe de $u(x)$.

x	0		α		$+\infty$
u		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u(x) > 0 \Longleftrightarrow x > \alpha \\ u(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad u(x) < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < \alpha}$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$.

1. Déterminer la limite de f en 0. On a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$$

Donc

$$\left|\begin{array}{ll} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) & = -\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} (\ln(x) - 2) & = -\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) = +\infty$$

Et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty}$$

2.

2. a. Démontrer que , pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$.

$$f : \left\{\begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \times (\ln(x) - 2) + 2 \end{array}\right.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme $uv + 2$ donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[\;;\; f(x) = u(x) \times v(x) + 2 \quad : \quad \left\{\begin{array}{lll} u(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) & ; & u'(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ v(x) = (\ln(x) - 2) & ; & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \,]0\,;+\infty[,\; f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2} \times (\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} \\ f'(x) &= \frac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \,]0\,;+\infty[\;;\; f'(x) = \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}}$$

 ©ISSN 2272-5318

2. b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

On a montré que : $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\ ;\ f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif de $f'(x)$ est du signe de $u(x)$.
L'étude de signe de la question **3.** de la **partie A** nous donne alors directement le signe de la dérivée de f et donc les variations de f que l'on peut résumer dans un tableau.

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	

La fonction f est donc <u>décroissante sur $]0\,;\,\alpha]$</u> et <u>croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$</u>.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2-\ln(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]0\,;+\infty[\ ;\ f(x) - \ln(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x)\\ f(x) - \ln(x) &= \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x} - 2 + \frac{2}{x} + 2 - \ln(x)\\ f(x) - \ln(x) &= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x}\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \,]0\,;+\infty[\ ;\ f(x) - \ln(x) = \frac{2-\ln(x)}{x}}$$

En déduire que les courbes $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point d'intersection dont on donnera les coordonnées.
Les abscisses des éventuels points d'intersections des courbes $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}'$ sont les solutions (si elles existent), de l'équation $f(x) = \ln(x)$.
Or d'après ce qui précède :

$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[\ ;\ f(x) = \ln(x) \iff f(x) - \ln(x) = 0$$
$$\begin{cases} f(x) = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{2-\ln(x)}{x} = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

et donc puisque x est strictement positif

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]0\,;+\infty[\ ;\ f(x) = \ln(x) &\iff \begin{cases} 2 - \ln(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} \ln(x) = 2 \\ x > 0 \end{cases}\\ \forall x \in \,]0\,;+\infty[\ ;\ f(x) = \ln(x) &\iff \begin{cases} x = \mathrm{e}^2 \\ x > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution à l'équation, le réel $x = \mathrm{e}^2$ ce qui nous donne l'abscisse du point d'intersection des deux courbes. L'ordonnée est alors $y = \ln \mathrm{e}^2 = 2$ et donc les coordonnée du point d'intersection sont

$$\boxed{(\mathrm{e}^2\,;\,2)}$$

2. On admet que la fonction H définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}\ (\ln x)^2$ est une primitive de h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \dfrac{2 - \ln x}{x}\ \mathrm{d}x$.

$$I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\ \mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$I = 2\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x - \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$$

Or sur $\left[1\ ;\ e^2\right]$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\ln x$ et une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est $H(x)$ soit :

$$\begin{aligned} I &= 2\left[\ \ln x\ \right]_1^{e^2} - \left[\ H(x)\ \right]_1^{e^2} \\ I &= 2 \times \underbrace{\ln\left(e^2\right)}_{2} - \underbrace{2\ln 1}_{0} - \underbrace{H\left(e^2\right)}_{2} + \underbrace{H(1)}_{0} \end{aligned}$$

Car on a :

$$\begin{cases} H\left(e^2\right) & = \dfrac{1}{2}\ \left(\ln\left(e^2\right)\right)^2 = \dfrac{1}{2}\ 2^2 = 2 \\ H(1) & = \dfrac{1}{2}\ (\ln 1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$I = 4 - 0 - 2 + 0$$

$$\boxed{I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\ \mathrm{d}x = 2}$$

Interpréter graphiquement ce résultat.
On a :

$$I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\ \mathrm{d}x = \int_1^{e^2} f(x) - \ln x\ \mathrm{d}x = 2$$

Sur l'intervalle $\left[1\ ;\ e^2\right]$, il est clair que $\ln x \leq 2$ et donc :

$$\forall x \in \left[1\ ;\ e^2\right]\ ;\ f(x) - \ln x = \frac{2 - \ln x}{x} \geq 0$$

De fait, l'intégrale sur l'intervalle $\left[1\ ;\ e^2\right]$ de $f(x) - \ln x$ représente l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = e^2$.