Baccalauréat S Asie 16 juin 2015

Corrigé

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de flèches atteignant la cible.
Pour un tir, la probabilité du succès est $p = 0,8$.
On répète 4 fois de façon indépendante le tir, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on a : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$. On cherche ici :

$$P(X \geqslant 3) = P(x = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^1 + \binom{4}{4} \times 0,8^4 \times 0,2^0 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192 \approx 0,819$$

2. La concurrent tire n flèches de façon indépendante ; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.
Pour atteindre en moyenne 12 fois la cible, il faut que l'espérance mathématique de la variable X soit égale à 12. Une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ a pour espérance mathématique $E(X) = np$.

On doit donc chercher n pour que $n \times 0,8 = 12 \iff n = \dfrac{12}{0,8} \iff n = 15$.

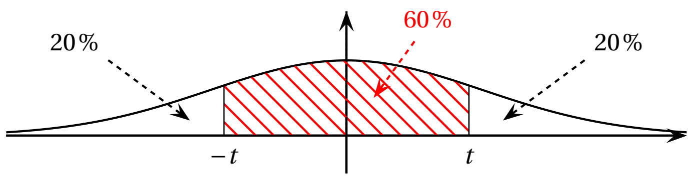
Il faut donc que le concurrent prévoie 15 flèches pour atteindre en moyenne la cible 12 fois.

Partie B

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Pour que la flèche soit hors de la bande grisée, il faut que $(X < -10)$ ou $(X > 10)$.
On cherche donc $P\big((X < -10) \cup (X > 10)\big)$ qui est égale à $1 - P(-10 \leqslant X \leqslant 10)$.
X suit la loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 10$, et on sait que pour toute loi normale, $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$ donc $P(-10 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,683$.
On peut donc dire que la probabilité que la flèche soit hors de la bande grisée est approximativement de $1 - 0,683 = 0,317$.
On peut également trouver ce résultat en utilisant la calculatrice.

2. On cherche un nombre positif t tel que $P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0,6$. Cela correspond au schéma suivant, en tenant compte des propriétés de symétrie de la fonction de densité de la loi normale :



$$\begin{array}{rcrcl} P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0,6 & \iff & P(X \leqslant t) - P(X \leqslant -t) & = & 0,6 \\ & \iff & P(X \leqslant t) - P(X \geqslant t) & = & 0,6 \\ & \iff & P(X \leqslant t) - (1 - P(X \leqslant t)) & = & 0,6 \\ & \iff & 2P(X \leqslant t) - 1 & = & 0,6 \\ & \iff & 2P(X \leqslant t) & = & 1,6 \\ & \iff & P(X \leqslant t) & = & 0,8 \end{array}$$

À la calculatrice, on trouve $t \approx 8,416$.

Les deux droites verticales délimitant la bande grise ont pour équations $x = -8,4$ et $x = 8,4$; alors la probabilité d'atteindre cette bande grisée est approximativement de 0,6.

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

D'après le cours, on peut dire que $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\,\text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \text{e}^{-\lambda t}$ et que

$P(T \geqslant t) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - \left(1 - \text{e}^{-\lambda t}\right) = \text{e}^{-\lambda t}$.

1. La probabilité que le panneau fonctionne au moins 2 000 heures est $P(T \geqslant 2000)$.
   $P(T \geqslant 2000) = \text{e}^{-10^{-4}\times 2000} \approx 0,819$
2. *Restitution organisée des connaissances*
   Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
   On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $E(T) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t \text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t$.

   a. On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda t}$.
   La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $F'(x) = -1 \times \text{e}^{-\lambda t} + \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \times (-\lambda)\,\text{e}^{-\lambda t} = -\text{e}^{-\lambda t} + \lambda t \text{e}^{-\lambda t} + \text{e}^{-\lambda t} = \lambda t \text{e}^{-\lambda t} = f(t)$
   Donc F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. L'espérance mathématique de la variable aléatoire T est :
   $$\begin{aligned} E(T) &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t \text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\text{d}t = \lim_{x\to+\infty} \Big(F(x) - F(0)\Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\left[\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda x} \right] - \left[-\frac{1}{\lambda} \times 1 \right] \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x\text{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x\text{e}^{-\lambda x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}}$ donc $E(T) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda}\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right)$

   - $$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lambda x = +\infty \\ \text{On pose } X = \lambda x \\ \text{On sait que } \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\text{e}^X}{X} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^{\lambda x}}{\lambda x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}} = 0$$
   - $$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lambda x = +\infty \\ \text{On pose } X = \lambda x \\ \text{On sait que } \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \text{e}^{-X} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\text{e}^{-\lambda x} = 0$$
   - Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-x\text{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$ et donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

   L'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents est $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$ soit 10 000 heures.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x + y + z - 5 = 0$ et $7x - 2y + z - 2 = 0$.

1. **Affirmation 1 :** les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

   Le plan $\mathcal{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$: $(1\,;1\,;1)$ et le plan $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$: $(7\,;-2\,;1)$.

   $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 7 - 2 + 1 = 6 \neq 0$ donc ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux et donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires.

   Affirmation 1 : FAUSSE

2. **Affirmation 2 :** les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& -3t+4 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

   On a vu dans la question précédente que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ avaient respectivement pour vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$: $(1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{n_2}$: $(7\,;-2\,;1)$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont donc sécants.

   Soit d la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& -3t+4 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$

   Pour voir si cette droite est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, il suffit de déterminer deux points de cette droite et de vérifier s'ils appartiennent aux deux plans.

   - En remplaçant t par 0 dans la représentation paramétrique de la droite d, on obtient le point $A\,(0\,;1\,;4)$. Or $x_A+y_A+z_A-5 = 0+1+4-5 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}_1$, et $7x_A-2y_A+z_A-2 = 0-2+4-2 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}_2$. On peut dire que $A \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
   - En remplaçant t par 1 dans la représentation paramétrique de la droite d, on obtient le point $B\,(1\,;3\,;1)$. Or $x_B+y_B+z_B-5 = 1+3+1-5 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}_1$, et $7x_B-2y_B+z_B-2 = 7-6+1-2 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}_2$. On peut dire que $B \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

   L'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est la droite (AB) de représentation paramétrique

   $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& -3t+4 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$

   Affirmation 2 : VRAIE

3. **Affirmation 3 :** au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle $[0{,}658\,;0{,}771]$.

   Le joueur gagne avec une fréquence de $f = \dfrac{223}{312} \approx 0{,}7147$.

   L'échantillon est de taille $n = 312 > 30$; $n \times f = 223 > 5$ et $n \times (1 - f) = 89 > 5$.

   Donc on peut déterminer l'intervalle de confiance au seuil 95 % :

   $$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}\,;\frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}}\right] \approx [0,658\,;0,771]$$

   Affirmation 3 : VRAIE

   Remarque du correcteur – En fait, les deux bornes de l'intervalle ont pour valeurs approchées à 10^{-4} les nombres 0,658 1 et 0,771 4 ; la règle veut que l'on arrondisse par défaut la borne inférieure, et par excès la borne supérieure, pour que l'intervalle obtenu contienne l'intervalle donné par la formule ; l'intervalle obtenu serait alors $[0{,}658\,;0{,}772]$ ce qui rendrait l'affirmation fausse. Mais était-ce vraiment l'intention du concepteur du sujet de « jouer » sur la troisième décimale ? Il faudrait, pour en être sûr, avoir les consignes de correction.

4. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$
TRAITEMENT	Lire a et b Tant que $b - a > 0,3$ x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x sinon b prend la valeur x Fin Si Fin Tant que Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Affirmation 4 : si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.

On fait tourner l'algorithme avec les valeurs de a, de b et l'expression de f données dans le texte, et on va décrire ce qui se passe à chaque étape en affichant l'état des variables a, b et x :

	a	b	x
a reçoit la valeur 1	1		
b reçoit la valeur 2	1	2	
$b - a = 1 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1	2	
x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2} = 1,5$	1	2	1,5
$f(a) = 1^2 - 3 = -2$	1	2	1,5
$f(x) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1	2	1,5
$f(x) \times f(a) > 0$ donc a prend la valeur $x = 1,5$	1,5	2	1,5
fin du tant que	1,5	2	1,5
$b - a = 0,5 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1,5	2	1,5
x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2} = 1,75$	1,5	2	1,75
$f(a) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1,5	2	1,75
$f(x) = 1,75^2 - 3 = 0,0625$	1,5	2	1,75
$f(x) \times f(a) < 0$ donc b prend la valeur $x = 1,75$	1,5	1,75	1,75
fin du tant que	1,5	1,75	1,75
$b - a = 0,25 \leqslant 0,3$ donc on n'entre pas dans la boucle	1,5	1,75	1,75
On affiche $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1,5+1,75}{2} = 1,625$	1,5	1,75	1,75

Affirmation 4 : FAUSSE

Il s'agit de l'algorithme de recherche par dichotomie de la solution positive de l'équation $x^2 - 3 = 0$.

Exercice 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = x + \text{e}^{n(x-1)}$.

Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1.
   - On sait que, pour tout X, $\text{e}^{X} > 0$ donc $\text{e}^{n(x-1)} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
     Sur $[0\,;\,1]$, $x \geqslant 0$, donc $x + \text{e}^{n(x-1)} > 0 \iff f_n(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = 1 + n\,\text{e}^{n(x-1)}$.
     Pour pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $n\,\text{e}^{n(x-1)} > 0$ donc $f_n'(x) > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.
2. $f_n(1) = 1 + \text{e}^{0} = 2$ donc toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point A de coordonnées $(1\,;\,2)$.
3. À l'aide des représentations graphiques, on peut conjecturer que le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
   Le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_n$ est égal à $f_n'(x_{\text{A}}) = f_n'(2) = 1 + n\,\text{e}^{n}$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \text{e}^{n} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\text{par produit}}{\lim\limits_{n\to+\infty} n\,\text{e}^{n} = +\infty} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(2) = +\infty$$

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;\,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 2$ donc la suite (u_n) est constante et chacun de ses termes est égal à 2 ; la suite (u_n) admet donc le nombre 2 comme limite.
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$.
   $x \in [0\,;\,1[\Longrightarrow x - 1 < 0$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x-1) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \text{e}^{n(x-1)} = 0$ (limite de fonctions composées)
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x + \text{e}^{n(x-1)}\right) = x$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
À partir des représentations graphiques et particulièrement en regardant l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_{100}$, on peut conjecturer que la limite de la suite A_n est $\dfrac{1}{2}$.
Pour démontrer cette conjecture, on cherche une primitive de la fonction f_n : pour $n > 0$, la fonction F_n définie par $F_n(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\text{e}^{n(x-1)}}{n}$ est une primitive de f_n sur $[0\,;\,1]$.
La fonction f_n est positive sur $[0\,;\,1]$ donc l'aire A_n est donnée par $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\text{d}t$.
Pour $n > 0$, $A_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\text{d}t = F_n(1) - F_n(0) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] - \left[0 + \frac{\text{e}^{-n}}{n}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{\text{e}^{-n}}{n}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \text{e}^{-n} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\text{e}^{-n}}{n} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{\text{e}^{-n}}{n}\right) = \frac{1}{2}\text{ ; donc } \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 4 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** On résout l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$; $\Delta = -3 < 0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

   b. $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = z_1$ donc j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

2. $|\mathrm{j}|^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$ donc $|\mathrm{j}| = 1$

   $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on cherche θ tel que $\left\{\begin{array}{lcl}\cos\theta & = & -\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$ Donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

   La forme exponentielle de j est donc : $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

3. **a.** $\mathrm{j}^3 = \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{2\pi\times 3}{3}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\times 2\pi} = 1$

   b. j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ donc $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$ et donc $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

   P a pour affixe 1 ; Q a pour affixe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et R pour affixe $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j} = -1 + \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\mathrm{PQ}^2 = \left|-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right|^2 = \left|-\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4} = 3 \Longrightarrow \mathrm{PQ} = \sqrt{3}$

   $\mathrm{QR}^2 = \left|-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| 2 = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2 = 3 \Longrightarrow \mathrm{QR} = \sqrt{3}$

   $\mathrm{RP}^2 = \left|1 + \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \left|\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4} = 3 \Longrightarrow \mathrm{RP} = \sqrt{3}$

   PQ = QR = RP donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. On sait que $a + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{j}^2 = 0$ donc $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c$.
   Or, d'après la question **A. 3. b.**, $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$ donc :
   $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c = -\mathrm{j}b - (-1-\mathrm{j})c = -\mathrm{j}b + c + \mathrm{j}c \iff a - c = \mathrm{j}(c - b)$
2. $a - c = \mathrm{j}(c-b) \Longrightarrow |a-c| = |\mathrm{j}(c-b)| \iff |a-c| = |\mathrm{j}| \times |c-b|$
   On a vu précédemment que $|\mathrm{j}| = 1$; de plus $|a-c| = \mathrm{AC}$ et $|c-b| = \mathrm{BC}$.
   On a donc démontré que AC = BC.

3. On sait que $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c$. On sait aussi que $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$ donc $\mathrm{j} = -1 - \mathrm{j}^2$.
   On a donc $a = -(-1 - \mathrm{j}^2)b - \mathrm{j}^2c = b + \mathrm{j}^2b - \mathrm{j}^2c$ ce qui équivaut à $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. On sait que $\left|\mathrm{j}\right| = 1$ donc $\left|\mathrm{j}^2\right| = \left|\mathrm{j}\right|^2 = 1$. De plus $|a - b| = \mathrm{AB}$ et $|b - c| = \mathrm{CB}$.
   On a vu dans la question précédente que $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$ ce qui entraîne $|a - b| = \left|\mathrm{j}^2(b - c)\right|$ ou encore $|a - b| = \left|\mathrm{j}^2\right| \times |b - c|$. Cette dernière égalité équivaut à AB = CB.
   Comme AC = BC et AB = CB, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \ldots + n$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. $36 = \dfrac{72}{2} = \dfrac{8 \times 9}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ donc 36 est un nombre triangulaire.
   De plus, $36 = 6^2$.
2. **a.** $1 + 2 + \ldots + n = p^2 \iff \dfrac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff n(n+1) = 2p^2 \iff n^2 + n - 2p^2 = 0.$
   Donc le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

   b. $n^2 + n - 2p^2 = 0 \iff 4n^2 + 4n - 8p^2 = 0 \iff 4n^2 + 4n + 1 - 8p^2 = 1 \iff (2n+1)^2 - 8p^2 = 1$
   Donc le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$, où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

1. Deux couples solution sont, par exemple, $(3\,;1)$ et $(1\,;0)$.
2. Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;\,y)$ solution de (E).
   Soit d un diviseur commun à x et y.
   Alors d divise x^2, y^2, $8y^2$ et donc d divise $x^2 - 8y^2$ donc d divise 1.
   On en déduit que $d = 1$ ou $d = -1$ ce qui veut dire que x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 8y \\ x + 3y \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x + 8y \\ y' & = & x + 3y \end{array}\right.$
2. La matrice A a un déterminant égal à 1, donc non nul, donc elle admet une matrice inverse A^{-1}.
   Pour déterminer A^{-1} on peut chercher la matrice carrée $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre le système de 4 équations à 4 inconnues $A \times A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; enfin il faut vérifier que $A' \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On peut également déterminer A^{-1} à la calculatrice et on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff A^{-1}\times\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}3 & -8\\-1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}3x'-8y'\\-x'+3y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3x'-8y'\\ y &=& -x'+3y'\end{array}\right.$$

3. $(x\,;\,y)$ est solution de (E) $\iff x^2-8y^2=1$
$\iff \left(3x'-8y'\right)^2-8\left(-x'+3y'\right)^2=1$
$\iff 9x'^2-48x'y'+64y'^2-8\left(x'^2-6x'y'+9y'^2\right)=1$
$\iff 9x'^2-48x'y'+64y'^2-8x'^2+48x'y'-72y'^2=1$
$\iff x'^2-8y'^2=1$
$\iff (x'\,;\,y')$ est solution de (E)

4. On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies par $x_0=3$, $y_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

- Pour $n=0$: $x_0=3$ et $y_0=1$ donc $x_0^2-8y_0^2=9-8=1$ donc $(x_0\,;\,y_0)$ est solution de (E).
  La propriété est vraie au rang 0.
- On suppose que la propriété est vraie à un rang p ($p\geqslant 0$) c'est-à-dire que $(x_p\,;\,y_p)$ est solution de (E) ; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut démontrer que $(x_{p+1}\,;\,y_{p+1})$ est solution de (E).
  On a vu dans la question précédente que si $(x\,;\,y)$ était solution de (E), alors $(x'\,;\,y')$ défini par $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est aussi solution de (E).
  Comme $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E), on peut dire que $(x_{n+1}\,;\,y_{n+1})$ est solution de (E) puisque $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$. Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire. Donc elle est vraie pour tout n.

Pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

On cherche un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.

- On cherche n entier naturel tel que : $1+2+3+\ldots+n\geqslant 2015$.
  Ce qui équivaut à $\dfrac{n(n+1)}{2}\geqslant 2015 \iff n^2+n-4030\geqslant 0$.
  L'équation $x^2+x-4030=0$ a pour solutions $\dfrac{-1-2\sqrt{329}}{2}\approx -63{,}98$ et $\dfrac{-1+2\sqrt{329}}{2}\approx 62{,}98$.
  Pour que le nombre triangulaire soit supérieur à 2 015, il faut que $n\geqslant 63$.
- Dans la partie **A** on a vu qu'un nombre triangulaire $1+2+\ldots+n$ était un carré si et seulement s'il existait un entier p tel que $(2n+1)^2-8p^2=1$.
- Dans la partie **C** on a déterminé une suite de couples $(x_n\,;\,y_n)$ qui étaient tous solutions de l'équation $x^2-8y^2=1$.
- On va donc chercher $n\geqslant 63$ tel que $(2n+1)^2-8p^2=1$; si $n\geqslant 63$, alors $2n+1\geqslant 127$.
  Ce qui revient à chercher les couples $(x_n\,;\,y_n)$ solutions de (E) avec $x_n\geqslant 127$.
- En partant de $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et en multipliant successivement par la matrice A, on trouve comme solutions $\begin{pmatrix}17\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}99\\35\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}577\\204\end{pmatrix}\ldots$

- $577 = 2\times 288+1$ donc un nombre triangulaire supérieur à 2 015 est $1+2+3+\ldots+288 = \dfrac{288\times 289}{2} = 41\,616$.
- On peut vérifier que $41\,616 = 204^2$ (résultat en conformité avec la question **A. 2. a.**).