Baccalauréat 2015 - S
Asie

Série S Obli. et Spé.
17 Juin 2015
Correction

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.**
Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la cible est atteinte.

- **Modélisation**
Vérifions les hypothèses de validation d'une *loi binomiale*.
  - Un tir a *2 états* : il atteint la cible ou pas. La probabilité de l'atteindre est : $p = 0,8$.
  - Il y a 4 « tirs ». Chaque tir est *indépendant, identique* et *aléatoire*.

  De ce fait, la variable aléatoire Z qui désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière *indépendante*, de 4 *épreuves de Bernoulli* de paramètre $p = 0,8$.

  La variable Z suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$, notée $\mathscr{B}(4\ ;\ 0,8)$.

- **Calcul**
Puisque Z suit une loi Binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0,8$ on a :
$$P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{4}{k} \times 0,8^k \times (0{,}2)^{4-k}$$
La probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible se traduit par : $P(Z \geq 3)$ or :
$$P(Z \geq 3) = P(X=3) + P(X=4)$$
$$P(Z \geq 3) = \binom{4}{3} \times 0,8^3 \times (0{,}2)^{4-3} + \binom{4}{4} \times 0,8^4 \times (0{,}2)^{4-4}$$
$$P(Z \geq 3) = 4 \times 0,8^3 \times (0{,}2)^1 + 1 \times 0,8^4 \times 1$$

  Donc arrondi au millième :
$$\boxed{P(Z \geq 3) = 0,819}$$
La probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible est de 0,819. *Remarque : Sur la TI Voyage 200*
$$1 - \text{TIStat.binomFdR}(4; 0,8; 2) = 0{,}819\,2$$

2. **Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?**
Méthode 1
A chaque tir, la probabilité que la flèche atteigne la cible est de $0,8$. On peut donc estimer que si le concurrent tire N flèches, alors 80% de ces flèches atteindront la cible. Pour atteindre en moyenne la cible douze fois il faut donc que :
$$80\% \times N = 12 \iff N = \frac{12}{0,8} = 15$$
Le concurrent doit prévoir 15 flèches pour atteindre en moyenne la cible douze fois.
Méthode 2
On peut modéliser l'expérience par une variable aléatoire Z qui suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0,8$. L'espérance mathématique d'une variable suivant une loi binomiale étant $E(Z) = np$ on a :
$$E(Z) = n \times 0,8 = 12 \iff \underline{n = 15}$$

Partie B

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.
La variable aléatoire X qui associe l'abscisse du point d'impact de la flèche, suit une loi normale de paramètre $\mu = 0$ et $\sigma = 10$.
La flèche atteint le plan hors de la bande grisée quand l'abscisse du point d'impact est soit inférieur à -10, soit supérieur à 10.
La probabilité cherchée est donc $P((X < -10) \cup (X > 10))$, or en passant à l'évènement contraire :

$$P((X < -10) \cup (X > 10)) = 1 - P(-10 \leq X \leq 10)$$

On va appliquer la propriété des intervalles dite :

> **Propriété 1** (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)
>
> Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :
>
> $$\begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &\approx 0,683 \quad : (1) \\ P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &\approx 0,954 \quad : (2) \\ P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &\approx 0,997 \quad : (3) \end{aligned}$$

Ici la variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}\left(\mu = 0\,;\,\sigma^2 = 10^2\right)$. On a donc ici d'après la relation (1) de la propriété 1 :

$$\begin{aligned} P(-10 \leq X \leq 10) &= P(0 - 10 \leq X \leq 0 + 10) \\ P(-10 \leq X \leq 10) &= P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \end{aligned}$$

En appliquant la relation (1) de la propriété 1 on a donc :

$$P(-10 \leq X \leq 10) \approx 0,683 \iff (1 - P(-10 \leq X \leq 10)) \approx 1 - 0,683 = 0,317$$

De ce fait :

$$\boxed{P((X < -10) \cup (X > 10)) = 1 - P(-10 \leq X \leq 10) \approx 0,317}$$

2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à 0,6 ?
Soit a un nombre réel.
Les limites de la bandes grisées sont composées de deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = -a$.
On cherche donc a pour que :

$$P(-a \leq X \leq a) = 0,6$$

> **Propriété 2**
>
> Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
> La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0\,;\,10^2\right)$, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - 0}{10}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
Donc :

$$\begin{aligned} P(-a \leq X \leq a) &= P\left(-\frac{a}{10} \leq \frac{X}{10} \leq \frac{a}{10}\right) \\ &= P\left(-\frac{a}{10} \leq Y \leq \frac{a}{10}\right) \\ P(-a \leq X \leq a) &= 2\Phi\left(\frac{a}{10}\right) - 1 \end{aligned}$$

En effet :

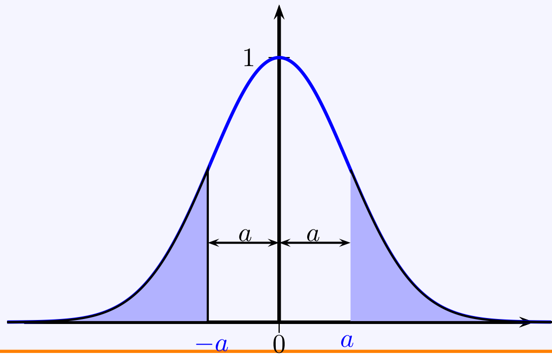
Propriété 3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

2. a. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(X \leq t)$.

2. b. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



Donc

$$P(-a \leq X \leq a) = 0,6 \iff 2\Phi\left(\frac{a}{10}\right) - 1 = 0,6 \iff \Phi\left(\frac{a}{10}\right) = 0,8$$

La calculatrice nous donne alors :

$$\Phi\left(\frac{a}{10}\right) = 0,8 \iff \frac{a}{10} \approx 0,8416$$

Et donc arrondi au millième on a

$$\boxed{a \approx 8,416}$$

Les limites de la bandes grisées seront composées de deux droites verticales d'équation $\underline{x = a \approx 8,416}$ et $\underline{x = -a \approx -8,416}$.

Remarque : Sur la TI Voyage 200

TIStat.invNorm(0.8) $\approx$ 0,841 621 233 465

Partie C

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins 2 000 heures ?

La variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$. Elle exprime la durée de vie (en heures) du panneau électrique. La probabilité que le panneau fonctionne au moins 2 000 heures se traduit donc par :

$$P(T \geq 2\,000)$$

Définition 1

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire à densité T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Propriété 4

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

On a donc d'après la propriété 4 :

$$P(T \geq 2\,000) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 2\,000} = \mathrm{e}^{-10^{-4} \times 2\,000}$$

Soit arrondi au millième :

$$\boxed{P(T \geq 2\,000) = \mathrm{e}^{-0,2} \approx 0,819}$$

©ISSN 2272-5318

2. *ROC : Restitution organisée de connaissances*
Dans cette question, λ est un réel strictement positif.

2. a. On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Démontrer que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f définie pour tout réel t par $f(t) = \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \times \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{cases}$$

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction F est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ F(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \begin{cases} u(x) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) & ; \quad u'(x) = (-1) \\ v(x) = \mathrm{e}^{-\lambda t} & ; \quad v'(x) = \left(-\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\quad F'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ F'(x) &= (-1) \times \mathrm{e}^{-\lambda t} + \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \times \left(-\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \\ F'(x) &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \times (-1 + \lambda t + 1) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ F'(x) = \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t} = f(t)}$$

La fonction F est bien une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

2. b. En déduire que l'espérance mathématique de la variable T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
On a noté f la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

L'espérance mathématique de la variable T est définie donc par :

$$E(T) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

Or d'après la question **C2a.**, la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x positif :

$$\begin{aligned} \int_0^x \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t &= \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \Big[\ F(t)\ \Big]_0^x \\ &= F(x) - F(0) \end{aligned}$$

La fonction F étant définie sur $\mathbb{R}$ par :$F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda t}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t &= \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(-0 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda \times 0} \\ \int_0^x \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t &= -x \times \mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda x} + \dfrac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

On va donc calculer la limite en $+\infty$ de cette expression.

On rappelle que :

$$E(T)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\left(-x\times \mathrm{e}^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}\right)$$

Propriété 5 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$
- (2) : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x}=0$
- (3) : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1$

On a donc :

- Limite du second terme : $\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

$$\left|\begin{array}{l}\forall\lambda>0\,;\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\lambda x=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0\end{array}\right\}\underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}=0$$

- Limite du premier terme : $x\times\mathrm{e}^{-\lambda x}=\dfrac{1}{\lambda}(-\lambda x)\times\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

$$\left|\begin{array}{l}\forall\lambda>0\,;\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}(-\lambda x)=-\infty\\ (2)\ :\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x}=0\end{array}\right\}\underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to+\infty}(-\lambda x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}=0=\lim_{x\to+\infty} x\times\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

- Conclusion :

$$\int_0^x \lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\underbrace{-x\times\mathrm{e}^{-\lambda x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}-\underbrace{\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}+\frac{1}{\lambda}$$

et

$$\boxed{E(T)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}}$$

Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

L'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents est alors :

$$\boxed{E(T)=\frac{1}{\lambda}=10^4=10\,000\text{ h}}$$

Exercice 2. Vrai/Faux — 4 points

Commun à tous les candidats

Affirmation 1 (Fausse)

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x+y+z-5=0$ et $7x-2y+z-2=0$ sont perpendiculaires.

Propriété 6

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{u}=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}\ .\ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0 \iff a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 6 :

- un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x+y+z-5=0$ est $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$;
- un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $7x-2y+z-2=0$ est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$.

Regardons si ces vecteurs sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=7-2+1=6\neq 0$$

Les deux vecteurs normaux aux plans ne sont pas orthogonaux, donc les plans ne sont pas perpendiculaires.
L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 ("Presque" Vraie)

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent suivant le droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x= & t\\ y= & 2t+1\\ z= & -3t+4\end{cases}\quad,\ t\in\mathbb{R}$$

Tout d'abord on remarque que les deux plans ne sont pas parallèles car leur vecteurs normaux ne sont pas colinéaires. Ils se coupent bien selon une droite.
Plusieurs méthodes ici, la plus rapide étant de vérifier que la droite que nous noterons (d) appartient aux deux plans.

- Pour plan $\mathcal{P}_1$.

$$(d)\quad:\quad\begin{cases} x= & t\\ y= & 2t+1\\ z= & -3t+4\end{cases}\quad\text{et}\quad \mathcal{P}_1\ \ x+y+z-5=0$$

On a :

$$t+(2t+1)+(-3t+4)-5=3t-3t+5-5=0\Rightarrow(d)\in\ \mathcal{P}_1$$

Donc la droite (d) appartient au plan $\mathcal{P}_1$.

- Pour plan $\mathcal{P}_2$.

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = & t \\ y = & 2t+1 \\ z = & -3t+4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \;\; 7x - 2y + z - 2 = 0$$

On a :

$$7t - 2(2t+1) + (-3t+4) - 2 = 7t - 7t + 2 - 2 = 0 \Rightarrow (d) \in \; \mathcal{P}_2$$

Donc la droite (d) appartient aussi au plan $\mathcal{P}_2$.

- La droite (d) appartient bien au deux plan $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ qui ne sont pas confondus, c'est donc leur droite d'intersection.

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 (Vraie)

Au niveau de confiance de 95%, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle $[0,658\,;\,0,771]$

- **1. Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 312$ *parties. Il est constaté que* 223 *sont gagnées.* ». Donc la fréquence observée de parties gagnées est

$$f = 223 \div 312 \approx 0{,}714743589 \;\; \text{soit} \;\; \boxed{f \approx 0{,}715}$$

- **2. Intervalle de confiance** :

Théorème 1 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p.

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & nf \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 312$, $f \approx 0{,}715$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 312 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 312 \times \dfrac{223}{312} = 223 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 312 \times \dfrac{89}{312} = 89 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}} \; ; \; \frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $\dfrac{223}{312} - \dfrac{1}{\sqrt{312}} \approx 0{,}65813$. On arrondit la borne inférieure par défaut 10^{-3} près soit 0,658.
- $\dfrac{223}{312} + \dfrac{1}{\sqrt{312}} \approx 0{,}77136$. On arrondit la borne supérieure par excès 10^{-3} près soit 0,772.

$$\boxed{I_{312} \approx \left[0{,}658 \;\; ; \;\; 0{,}772\right]}$$

©ISSN 2272-5318

- **3. Conclusion**
  Difficile de conclure ici, on peut penser à une erreur d'arrondi dans le sujet sur la borne de droite.
  Attendons les consignes de correction mais dans ce cas, il faut bien le signaler sur la copie !
  On va dire que l'affirmation 3 est, "presque" vraie.

  Remarque importante : Beaucoup de questions posées sur cet exercice. Il faut bien se rappeler que l'intervalle de confiance approché, $[a\,;\,b]$ doit contenir :
  $$I_{312} = \left[\frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}\,;\,\frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}}\right] \subseteq [a\,;\,b]$$
  Il faut donc que :
  $$a \leq \underbrace{\frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}}_{\approx 0{,}658\,1} \leq \underbrace{\frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}}}_{\approx 0{,}771\,36} \leq b$$
  La borne de droite, b doit être supérieure à $\left(\frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}}\right)$, c'est pour cela que l'on doit arrondir par excès, à $0,772$.

Affirmation 4 (Fausse)

Si on entre $a = 1,\ b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre $1{,}687\,5$.

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$
TRAITEMENT	Lire a et b Tant que $b - a > 0,3$ x prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x sinon b prend la valeur x Fin Si Fin Tant que Afficher $\frac{a+b}{2}$

On peut représenter les différentes étape par un tableau donnant les valeurs des différentes variables.

Etape	a	b	$b-a$	Test $b-a > 0,3$	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(x)$	$f(x)f(a)$	Test $f(x)f(a) > 0$	
Etape 1	1	2	1	oui	1,5	-2	-0,75	1,5	oui	$a = 1,5$
Etape 2	1,5	2	0,5	oui	1,75	-0,75	0,0625	-0,046875	non	$b = 1,75$
Etape 3	1,5	1,75	0,25	non => Stop						

L'algorithme affichera donc en sorti :
$$\frac{a+b}{2} = \frac{1,5+1,75}{2} = 1,625$$
On considère que l'affichage est le résultat du calcul $\frac{a+b}{2}$.

L'affirmation 4 est fausse.

Remarque : la plupart des programme affichent des valeurs de variables, et pas des résultats de calculs ainsi posés. L'algorithme proposé est donc assez peu légitime !

Exercice 3. Fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

- La dérivée.
  La fonction f_n définie sur $[0\,;\,1]$ est dérivable comme somme et composée de fonctions qui le sont.
  La fonction $x \mapsto f_n$ est de la forme $x \mapsto x + \mathrm{e}^{u(x)}$ avec u dérivable sur $[0\,;\,1]$,
  donc de dérivée $x \mapsto 1 + u'\,\mathrm{e}^{u}$ avec $\begin{cases} u(x) &= n(x-1) \\ u'(x) &= n \end{cases}$. On a donc :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,1]\ ;\ f_n'(x) = 1 + n\,\mathrm{e}^{n(x-1)}}$$

- Variations de f_n.
  La dérivée de f_n s'exprime comme une somme de deux termes positifs sur $[0\,;\,1]$.
  En effet, l'exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\left|\begin{array}{lrl} \forall x \in [0\,;\,1]\ ; & e^{n(x-1)} & > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} & n & \geq 0 \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \quad \forall x \in [0\,;\,1]\ ;\quad n\,\mathrm{e}^{n(x-1)} \geq 0$$

  Et donc en ajoutant 1 aux deux membres de l'inégalité :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,1]\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ f_n'(x) = 1 + n\,\mathrm{e}^{n(x-1)} \geq 1 > 0}$$

  Pour tout entier n, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.
- Signe de f_n.

$$\forall x \in [0\,;\,1]\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}$$

  On peut dresser le tableau de variations de f_n avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ f_n(0) = \mathrm{e}^{-n} \text{ et } f_n(1) = 2$$

x	0	1
Signe de $f_n'(x)$	$+$	
f_n	$\mathrm{e}^{-n} > 0$ ↗	2

  Pour tout entier n, f_n est croissante strictement sur $\int$ et de minimum $f_n(0) = \mathrm{e}^{-n} > 0$.
  De ce fait, pour tout entier n, f_n est positive sur $\int$.

2. Montrer que les courbes C_n ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
Soient C_n et C_p deux courbes quelconque avec n et p entier distincts. Les abscisses des éventuels points d'intersections des courbes sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f_n(x) = f_p(x)$. Soit :

$$f_n(x) = f_p(x) \iff x + \mathrm{e}^{n(x-1)} = x + \mathrm{e}^{p(x-1)}$$
$$f_n(x) = f_p(x) \iff \mathrm{e}^{n(x-1)} = \mathrm{e}^{p(x-1)}$$

En composant par la fonction ln définie sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$f_n(x) = f_p(x) \iff n(x-1) = p(x-1)$$
$$f_n(x) = f_p(x) \iff x(n-p) = n-p$$

Or on a supposé n et p entiers distincts donc $n - p \neq 0$:

$$f_n(x) = f_p(x) \Longleftrightarrow x = \frac{n-p}{n-p} = 1$$

L'unique solution de l'équation est donc $x = 1$ ce qui nous donne l'abscisse de A, son ordonnée étant $f_n(1) = 2$.
Les courbes C_n ont toutes un point commun :

$$\boxed{A\,(1\,;\,2)}$$

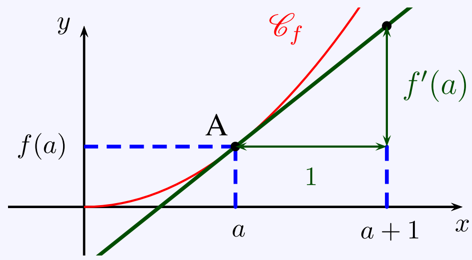
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathcal{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ? Démontrer cette conjecture.

- Conjecture.
  Il semblerait que les coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes C_n correspondent aux termes d'une suite croissante de limite $+\infty$.
- Preuve.

Propriété 7 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{T\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



On rappelle que :

$$\forall x \in [0\,;\,1]\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ f_n(x) = x + \mathrm{e}^{\,n(x-1)}$$

On a calculé la dérivé de f_n lors de la question **A1.**

$$\forall x \in [0\,;\,1]\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ f_n'(x) = 1 + n\,\mathrm{e}^{\,n(x-1)}$$

Le coefficient directeur des tangente en A est donc donné par la valeur de

$$f_n'(1) = 1 + n \times \mathrm{e}^{\,n(1-1)} = n + 1$$

La suite de terme général $u_n = (1+n)$ est croissante et de limite $+\infty$ ce qui prouve la conjecture.

Non demandé : la tangente à C_n en A est donc la droite d'équation :

$$\boxed{y = (n+1)x - n + 1}$$

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle [0 ; 1] . Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

$$\forall x \in [0\,;\,1]\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ f_n(x) = x + \mathrm{e}^{\,n(x-1)}$$

La suite (u_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = f_n(1) = 2$$

Cette suite est constante, égale à 2, donc de limite 2.

2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
La suite (u_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = f_n(x) = x + \mathrm{e}^{\,n(x-1)}$$

On peut écrire le terme général de la suite sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = x + \left(\mathrm{e}^{\,(x-1)}\right)^n$$

 ©ISSN 2272-5318

Or

$$0 \leq x < 1 \iff -1 \leq x-1 < 0$$

En composant par la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$0 \leq x < 1 \iff 0 < \mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{x-1} < \mathrm{e}^{0} = 1$$

Or on rappelle le théorème suivant :

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Puisque $0 < \mathrm{e}^{x-1} < 1$, par application du théorème 2 avec $q = \mathrm{e}^{x-1}$ on a :

$$\forall x \in [0\,;\,1[\ ;\ \lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{(x-1)}\right)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,1[\ ;\ \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} x + \left(\mathrm{e}^{(x-1)}\right)^n = x}$$

Partie C : aire sous les courbes $\mathcal{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

- **Conjecture**.
  Le domaine délimité par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ semble se rapprocher de plus en plus d'un triangle rectangle isocèle de côté 1.
  On peut donc conjecturer que la limite de (A_n) est 0.5 unités d'aire.
- **Preuve**.
  On a montré que les fonction f_n étaient positives et dérivables, donc continues et intégrables sur $\int$.
  Les fonctions f_n admettent des primitives sur cet intervalle.
  - Une primitive de $x \mapsto x$ est par exemple $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$;
  - Une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{n(x-1)}$ est par exemple $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{n(x-1)}}{n}$;

  On a donc :

$$A_n = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$A_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{n(x-1)}\right)\mathrm{d}x$$
$$A_n = \left[\ \frac{x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}^{n(x-1)}}{n}\ \right]_0^1$$
$$A_n = \frac{1^2}{2} + \frac{\mathrm{e}^{n(1-1)}}{n} - \frac{0^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^{n(0-1)}}{n}$$
$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$$

  Or

$$\left|\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \boxed{A_n = \frac{1}{2}}$$

  La limite de (A_n) est 0.5 unités d'aire.

Exercice 4. Obligatoire : Complexes — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Partie A : propriétés du nombre j

1.

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est une équation du second degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec : $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$.
Le discriminent $\Delta = -3 < 0$ donc elle admet deux racines complexes conjuguées.

$$\boxed{z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$$

1. b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
Le nombre complexe j est une solution de cette équation car avec le notations de la question **A1.**,

$$\boxed{z_1 = j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
Pour avoir la forme exponentielle de $z_1 = j$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| & = \frac{1}{2}\sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \end{array}\right| \Longrightarrow \boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}}$$

3. Démontrer les égalités suivantes :

3. a. $j^3 = 1$;

$$j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{3\times\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1 \Longrightarrow \boxed{j^3 = 1}$$

3. b. $j^2 = -1 - j$.
On a montré lors de la question **A1b.** que le nombre complexe j est une solution de l'équation de la question **A1a.** donc :

$$j^2 + j + 1 = 0 \Longleftrightarrow \boxed{j^2 = -1 - j}$$

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.
On va calculer les distances PQ, PR et QR dans le repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

- Pour PQ.

$$PQ = |z_Q - z_P| = |j - 1| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$\boxed{PQ = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 3} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}}$$

- Pour PR.

$$PR = |z_R - z_P| = \left|\text{j}^2 - 1\right|$$

Or d'après la question **A3b.** on a $\text{j}^2 = -1 - \text{j}$ donc :

$$PR = |-\text{j} - 2| = |\text{j} + 2|$$
$$PR = \left|2 - \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{3}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$\boxed{PR = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 3} = \sqrt{3}}$$

- Pour QR.

$$QR = |z_R - z_Q| = \left|\text{j}^2 - \text{j}\right|$$

Or d'après la question **A3b.** on a $\text{j}^2 = -1 - \text{j}$ donc :

$$QR = |-1 - 2\text{j}| = \left|-1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$$

$$\boxed{QR = \left|\text{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}}$$

- On a montré que $PQ = PR = QR = \sqrt{3}$, le triangle PQR est donc équilatéral.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \text{j}b + \text{j}^2c = 0$. On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A-3.b., démontrer l'égalité : $a - c = \text{j}(c - b)$.

Lors de la question **A-3.b.** on a montré que : $\text{j}^2 = (-1 - \text{j})$ donc :

$$\begin{aligned} a + \text{j}b + \text{j}^2c = 0 &\iff a + \text{j}b + (-1 - \text{j})\,c = 0 \\ &\iff a + \text{j}b - c - c\text{j} = 0 \\ &\iff \boxed{a - c = \text{j}(c - b)} \end{aligned}$$

2. En déduire que AC = BC .

On vient de montré que :

$$a - c = \text{j}(c - b)$$

En passant au module dans cette égalité on a :

$$a - c = \text{j}(c - b) \Rightarrow |a - c| = |\text{j}(c - b)|$$

Or

$$\left\{\begin{array}{l} |a - c| = CA \\ |\text{j}| = 1 \text{ d'après la question } \mathbf{A2.} \\ |\text{j}(c - b)| = |\text{j}| \times |c - b| = 1 \times |c - b| = BC \end{array}\right| \Longrightarrow |a - c| = |\text{j}(c - b)| \iff AC = BC$$

On a donc montré que AC = BC.

3. Démontrer l'égalité : $a-b=\mathrm{j}^2(b-c)$.

Lors de la question **B1.** on a montré que : $a-c=\mathrm{j}(c-b) \iff a=c+\mathrm{j}(c-b)$ donc :

$$a-b=\underbrace{(c+\mathrm{j}(c-b))}_{a}-b$$
$$a-b=c+\mathrm{j}c-\mathrm{j}b-b$$
$$a-b=(1+\mathrm{j})c-(\mathrm{j}+1)b$$

Or de l'équation $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$ de la question **A1b.** on obtient : $(1+\mathrm{j})=-\mathrm{j}^2$

$$a-b=\underbrace{(1+\mathrm{j})}_{-\mathrm{j}^2}c-\underbrace{(1+\mathrm{j})}_{-\mathrm{j}^2}b$$
$$a-b=-\mathrm{j}^2c+\mathrm{j}^2b$$

Soit

$$\boxed{a-b=\mathrm{j}^2(b-c)}$$

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

- On rappelle que le module de j est 1.
- De l'égalité de la question **B3.** on obtient en passant au module :

$$|a-b|=\left|\mathrm{j}^2(b-c)\right|=\underbrace{|\ \mathrm{j}\ |}_{1}^2\times|b-c|$$

  Soit

$$\boxed{AB=BC}$$

- On a montré lors de la question **B2.** que $AC=BC$, donc <u>ABC est équilatéral</u> :

$$\boxed{AB=BC=AC}$$

Spécialité 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1+2+\ldots+n$.
On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
Pour $n=8$ dans la relation (1) on a

$$1+2+\ldots+8 = \frac{8(8+1)}{2} = \frac{8\times 9}{2} = 36$$

Donc <u>36 est un nombre triangulaire</u> et évidemment <u>un carré</u> car $36 = 6^2$.

2. 2. a. Montrer que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2+n-2p^2=0$.
Le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $1+2+\ldots+n = p^2$ or d'après la relation (1) on a :

$$\boxed{1+2+\ldots+n = p^2 \iff \frac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff n^2+n-2p^2 = 0}$$

2. b. En déduire que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2-8p^2=1$.
Par un développement on obtient :

$$(2n+1)^2-8p^2 = 1 \iff 4n^2+4n+1-8p^2 = 1 \iff n^2+n-2p^2 = 0$$

Donc en utilisant le résultat de la question **A1.** :

$$\boxed{1+2+\ldots+n = p^2 \iff n^2+n-2p^2 = 0 \iff (2n+1)^2-8p^2 = 1}$$

Le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2-8p^2=1$

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne : $(E)\quad : \quad x^2-8y^2=1$, où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).

- Le couple <u>$(3\,;\,1)$ est solution de (E)</u> car : $3^2-8\times 1^2 = 9-8 = 1$.
- Le couple <u>$(1\,;\,0)$ est solution de (E)</u> car : $(1)^2-8\times 0^2 = 1$.

2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Théorème 3 (Bézout, 1730-1883)

Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, <u>si et seulement si</u>,
il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=1$.

Soit :

$$\text{PGCD}\,(a\,;\,b) = 1 \iff \exists\,(u\,;\,v) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ au+bv = 1$$

Remarque : C'est le groupe Bourbaki qui donne vers 1948 le nom de Bézout à ce théorème qui en fait est énoncé et démontré par le mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) dans ses « *Problèmes plaisans et délectables* » publié en 1624. Bézout démontre lui une généralisation de ce théorème aux polynômes en 1764 dans un mémoire présenté à l'académie des sciences.

Supposons que le couple $(x\ ;\ y)$ soit solution de (E), alors :

$$(E)\quad :\quad x^2 - 8y^2 = 1 \iff x \times (x) + y \times (-8y) = 1$$

De ce fait il existe deux entiers relatifs $u = x$ et $v = -8y$ tels que :

$$xu + yv = 1$$

Le théorème 3 dit de Bézout (Bachet) permet alors de conclure que les entiers x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs et la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 8y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{\begin{cases} x' &= 3x + 8y \\ y' &= x + 3y \end{cases}}$$

2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

- Calcul de l'inverse.

Propriété 8 (Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2)

Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 non nulle.
Alors A est inversible si, et seulement si, me nombre $(ad - bc)$ est non nul et dans ce cas :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Ici on a $(ad - bc) = 9 - 8 = 1 \neq 0$ donc A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{9-8} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

- Exprimons x et y en fonction de x' et y'.
En multipliant à gauche par A^{-1} dans l'égalité matricielle de la question **C1.** :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff A^{-1} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 3x' - 8y' \\ -x' + 3y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

Soit

$$\boxed{\begin{cases} x &= 3x' - 8y' \\ y &= -x' + 3y' \end{cases}}$$

3. Démontrer que $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\ ;\ y')$ est solution de (E).

- Le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si $(E)\ \ x^2 - 8y^2 = 1$.
  D'après les questions **C1./C2.** on a :

$$\begin{cases} x &= (3x' - 8y') \\ y &= (-x' + 3y') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' &= 3x + 8y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x^2 - 8y^2 = 1 &\iff (3x' - 8y')^2 - 8(-x' + 3y')^2 = 1 \\ &\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) = 1 \\ &\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8x'^2 + 48x'y' - 72y'^2 = 1 \\ &\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8x'^2 + 48x'y' - 72y'^2 = 1 \\ &\iff \underbrace{(9x'^2 - 8x'^2)}_{x'^2} + \underbrace{(48x'y' - 48x'y')}_{0} + \underbrace{(64y'^2 - 72y'^2)}_{-8y'^2} = 1 \\ x^2 - 8y^2 = 1 &\iff x'^2 - 8y'^2 = 1 \end{aligned}$$

$\boxed{(x\ ;\ y) \text{ est solution de (E) si et seulement si } (x'\ ;\ y') \text{ est solution de (E).}}$

4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3,\ y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de (E).
On rappelle qu'un couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de (E) si et seulement si : $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat :

$$(P_n)\ :\ x_n^2 - 8y_n^2 = 1$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$x_0 = 3\ ;\ y_0 = 1 \ \text{ et } \ x_0^2 - 8y_0^2 = 3^2 - 8 \times 1^2 = 1$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

  – Puisque

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

  On va appliquer le résultat de la question **C3.** avec

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

  – D'après l'hypothèse de récurrence le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de (E), donc d'après la question **C3.**, le couple $(x'\ ;\ y') = (x_{n+1}\ ;\ y_{n+1})$ est aussi solution de (E)
  – On a alors montré que $x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 1$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{x_n^2 - 8y_n^2 = 1}$$

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.

Si $N = 1 + 2 + \cdots + n$ est un nombre triangulaire supérieur à 2 015 et également le carré d'un entier alors il vérifie :

$$\begin{cases} N = 1 + 2 + \ldots + n \geq 2015 \\ 1 + 2 + \ldots + n = p^2 \iff (2n+1)^2 - 8p^2 = 1 \quad \text{: Question A2b} \end{cases}$$

De ce fait le couple $\underline{(2n+1\,;\,p) \text{ doit être solution de } (E)}$.

On utilise la suite de couples $(x_n\ ;\ y_n)$ définie dans la **partie C**. On obtient les valeurs suivantes en utilisant la relation :

$$x_0 = 3\ ;\ y_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \ :\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

On va noter l'indice de la suite n' pour ne pas les mélanger.

n'	$x_{n'}$	$y_{n'}$	$(2n+1\,;\,p)$	n	$N = \dfrac{n(n+1)}{2} = p^2$
0	3	1	$(2n+1\,;\,p) = (3\,;\,1)$	1	$1 = 1^2$
1	17	6	$(2n+1\,;\,p) = (17\,;\,6)$	8	$36 = 6^2$
2	99	35	$(2n+1\,;\,p) = (99\,;\,35)$	49	$1\,225 = 35^2$
3	577	204	$(2n+1\,;\,p) = (577\,;\,204)$	288	$41\,616 = 204^2$
4	3 363	1 189	$(2n+1\,;\,p) = (3\,363\,;\,1\,189)$	1 681	$1\,413\,721 = 1\,189^2$
5	19 601	6 930	$(2n+1\,;\,p) = (19\,601\,;\,6\,930)$	9 800	$48\,024\,900 = 6\,930^2$
6	114 243	40 391	$(2n+1\,;\,p) = (114\,243\,;\,40\,391)$		

Ainsi :

- <u>Exemple 1</u> :

$$\begin{cases} 2n+1 & = 577 \\ p & = 204 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n & = \dfrac{577-1}{2} = 288 \\ p & = 204 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\boxed{\begin{cases} N & = 1 + 2 + \ldots + 288 = \dfrac{n(n+1)}{2} = 41\,616 > 2\,015 \\ N & = p^2 = 204^2 \end{cases}}$$

- <u>Exemple 2</u> :

$$\begin{cases} 2n+1 & = 3\,363 \\ p & = 1\,189 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n & = \dfrac{3\,363-1}{2} = 1\,681 \\ p & = 1\,189 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\boxed{\begin{cases} N & = 1 + 2 + \ldots + 1\,681 = \dfrac{n(n+1)}{2} = 1\,413\,721 > 2\,015 \\ N & = p^2 = 1\,189^2 \end{cases}}$$

 ©ISSN 2272-5318