Baccalauréat S Asie 16 juin 2015

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

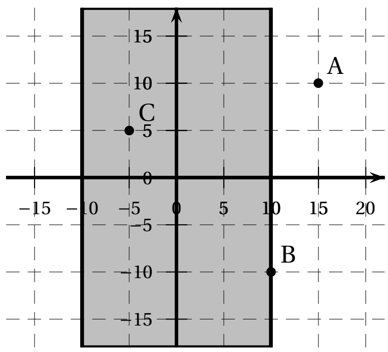
1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.

On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.



Ainsi, par exemple :

- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.
2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0,6$?

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?

2. *Restitution organisée des connaissances*
   Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
   On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $\text{E}(T) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t\text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t$.
   a. On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda t}$.
   Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t\text{e}^{-\lambda t}$.
   b. En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
   Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives$x + y + z - 5 = 0$ et $7x - 2y + z - 2 = 0$.

1. **Affirmation 1 :** les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.
2. **Affirmation 2 :** les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 2t+1\\ z &=& -3t+4\end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$
3. Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.
   On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.
   Affirmation 3 : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle [0,658 ; 0,771].
4. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

TRAITEMENT	Lire a et b
	Tant que $b - a > 0,3$
	    x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	    Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x
	            sinon b prend la valeur x
	    Fin Si
	Fin Tant que
	Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Affirmation 4 : si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.

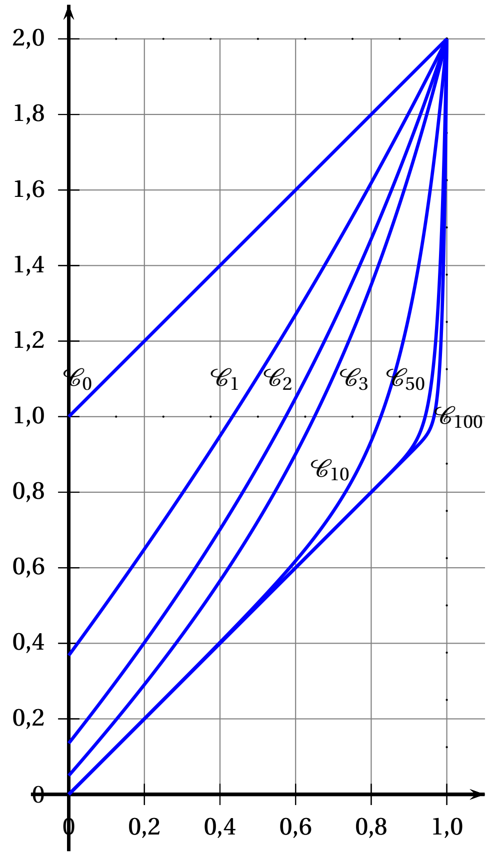
Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?

   Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0 ; 1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $\mathrm{j}^3 = 1$;
   b. $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \ldots + n$.
Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. **a.** Montrer que le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.
   b. En déduire que le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne

$$x^2 - 8y^2 = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).

2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

3. Démontrer que $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\ ;\ y')$ est solution de (E).

4. On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.