Durée : 4 heures

∽ Correction du Baccalauréat S Centres étrangers ∾ 10 juin 2015

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

1. La probabilité qu'un cadenas soit défectueux est $p = 0,03$. La taille de l'échantillon est $n = 500$.
   On a $n = 500 \geqslant 30$, $np = 15 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 485 \geqslant 5$.
   Les conditions sont alors vérifiées pour appliquer la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :
   $I_{500} = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$
   $= \left[0,03 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,03\times 0,97}}{\sqrt{500}}\ ;\ 0,03 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,03\times 0,97}}{\sqrt{500}}\right]$, soit environ $\boxed{[0,015\ ;\ 0,045]}$.
   La fréquence observée de cadenas défectueux est
   $f = \dfrac{19}{500} = \dfrac{38}{1000} = \boxed{0,038 \in I_{500}}$.
   Ce contrôle ne remet donc pas en cause, au risque de 95 %, l'affirmation du fournisseur.
2. La fréquence de cadenas défectueux est $f = \dfrac{39}{500} = \dfrac{78}{1000} = \boxed{0,078}$. La taille de l'échantillon est $n = 500$.
   On a $n = 500 \geqslant 30$, $nf = 39$ et $n(1-f) = 461 \geqslant 5$.
   Les conditions sont réunies pour appliquer la formule donnant l'intervalle de confiance au seuil de 95 %.
   $I'_{500} = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,078 - \dfrac{1}{\sqrt{500}}\ ;\ 0,078 + \dfrac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx \boxed{[0,033\ ;\ 0,123]}$.

Partie B

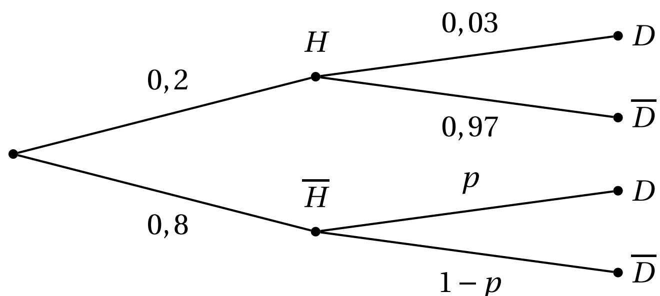
D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. $P(725 \leqslant X \leqslant 775) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx \boxed{68,3\,\%}$, soit 0,683 (d(après le cours).
   On peut aussi effectuer le calcul à la calculatrice.

2. On cherche donc le plus petit entier $n$tel que $P(X \geqslant n) < 0,05$.
Cela équivaut à $1 - P(X < n) < 0,05 \iff P(X < n) > 0,95$.
À la calculatrice, on cherche le nombre réel α vérifiant $P(X \leqslant \alpha) = 0,05$:
n est le plus petit entier supérieur ou égal à α ; on en déduit $\boxed{n = 792}$.

Partie C

1.



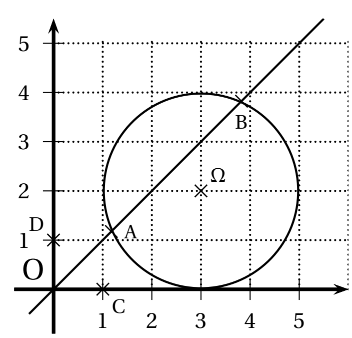
2. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(D) = P_H(D) \times P(H) + P_{\overline{H}}(D) \times P\left(\overline{H}\right) = 0,2 \times 0,003 + 0,8p = \boxed{0,006 + 0,8p}$.
Or, $P(D) = 0,07$. On en déduit que $0,006 + 0,8p = 0,07$ donc $p = \dfrac{0,07 - 0,006}{0,8}$
$= \dfrac{0,064}{0,8} = \dfrac{64}{800} = \dfrac{8}{100} = \boxed{0,08}$.
$0,08 \in [0,033\ ;\ 0,123]$, donc ce résultat est cohérent avec le résultat de la question A-2.

3. $P_{\overline{D}}(H) = \dfrac{P\left(H \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \dfrac{0,194}{0,93} \approx \boxed{0,209}$.

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 :
Notons C et D les points d'affixes respectives 1 et i. Alors :$|z - 1| = |z - \text{i}| \iff |z_M - z_C| = |z_M - z_D|$
$\iff MC = MD$.
L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |z - \text{i}|$ est donc la médiatrice de [CD], c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.
Notons Ω le point de coordonnées (3 ; 2) qui a donc pour fixe $3 + 2\text{i}$.
$|z - 3 - 2\text{i}| \leqslant 2. \iff |z_M - z_\Omega| \leqslant 2 \iff M\Omega \leqslant 2$. S est donc bien le segment [AB]



L'ensemble S est le segment [AB]. **VRAI**

2. Affirmation 2 : Soit $a = \sqrt{3} + \text{i}$.
$|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
Alors $a = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
On en déduit que $\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)^{1515} = \left(2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{1515} = 2^{1515}\text{e}^{\text{i}\frac{1515\pi}{6}} = 2^{1515}\text{e}^{\text{i}\frac{505\pi}{2}}$.
Or $\dfrac{505\pi}{2} = \dfrac{4\times 126+1}{2}\pi = 126\times 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$.
On en déduit que $a^{1515} = 2^{1515}\text{e}^{\text{i}\left(126\times 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 2^{1515}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 2^{1515}\text{i} \notin \mathbb{R}$. **FAUX**

3. Affirmation 3 : $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& 2t\\ y &=& -3+4t\\ z &=& 7-10t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. est la représentation paramétrique d'une droite.
Pour $t = 1$, on obtient les coordonnées de E et pour $t = \dfrac{1}{2}$, on obtient les coordonnées de F.
E et F appartiennent à cette droite, donc cette droite est bien la droite (EF). **VRAI**

4. Affirmation 4 : On a E$(2~;~1~;~-3)$, F$(1~;~-1~;~2)$ et G$(-1~;~3~;~1)$.
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{EF}}$ et $\overrightarrow{\text{EG}}$ ont pour coordonnées :
$\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{EG}}\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$.
Alors : $\overrightarrow{\text{EF}}.\overrightarrow{\text{EG}} = -1\times(-3) + (-2)\times 2 + 5\times 2 = 3-4+20 = 19$.
$\text{EF} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+5^2} = \sqrt{30}$; $\text{EG} = \sqrt{(-3)^2+2^2+4^2} = \sqrt{29}$.
On a alors :
$\overrightarrow{\text{EF}}.\overrightarrow{\text{EG}} = \text{EF}\times\text{EG}\times\cos\left(\widehat{\text{FEG}}\right)$ donc $\cos\left(\widehat{\text{FEG}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\text{EF}}.\overrightarrow{\text{EG}}}{\text{EF}\times\text{EG}} = \dfrac{19}{\sqrt{30}\times\sqrt{29}} = \dfrac{19}{\sqrt{870}}$.
À la calculatrice, on trouve $\widehat{\text{FEG}} \approx 49,89\,^{\circ} \approx 50\,^{\circ}$. **VRAI**

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

On considère a suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \text{e}^{2u_n} - \text{e}^{u_n}.$$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \text{e}^{2x} - \text{e}^{x} - x.$$

   a) g est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\text{e}^{2x} - \text{e}^{x} - 1 = \left(2\left(\text{e}^{x}\right)^2 - \text{e}^{x} - 1\right) = 2X^2 - X - 1$ en posant $X = \text{e}^{x}$.

$2X^2 - X - 1$ a pour racines 1 et $-\dfrac{1}{2}$ donc $2X^2 - X - 1 = 2(X-1)\left(X + \dfrac{1}{2}\right) = (X-1)(2X+1)$.

On en déduit : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(2\mathrm{e}^x + 1\right)$

b) Pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $2\mathrm{e}^x + 1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

$\mathrm{e}^{x-1} = 0$ pour $x = 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$.

On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g a donc pour minimum 0, atteint pour $x = 0$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left(\mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}\right) - u_n = g\left(u_n\right) \geqslant 0$ puisque le minimum de g est 0.

On en déduit que la suite (u_n) est **croissante**.

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

— **Initialisation :** $u_0 = a \leqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n \leqslant 0$.
On a : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{u_n} \leqslant 1$ d'où $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \leqslant 0$.
Comme $\mathrm{e}^{u_n} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} \leqslant 0$.
La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

b) La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 0, donc convergente vers un réel $\ell \leqslant 0$.

c) On suppose que $a = 0$. Le premier terme de la suite vaut 0. La suite est croissante et majorée par 0, donc tous les termes de la suite valent 0 et la suite **converge vers 0**.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$.

Comme $u_n \geqslant a > 0$, tous les termes de la suite sont positifs. D'après les variations de g sur $[0\,;=\infty[$, on a $g\left(u_n\right) \geqslant g(a)$ donc $\boxed{u_{n+1} — u_n \geqslant g(a)}$.

b) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $a+n\times g(a) = a+0\times g(a) = a$; or $u_n \geqslant a$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$. La propriété est initialisée.
- **Hérédité** : on suppose que, pour un entier n quelconque, $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.
  Alors : $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right) \iff u_{n+1} = u_n + g\left(u_n\right)$
  $\geqslant \left(a + n \times g(a))\right) + g\left(u_n\right)$ (d'après l'hypothèse de récurrence).
  Or $u_n \geqslant a > 0$ donc $g\left(u_n\right) \geqslant g(a)$ puisque la fonction g est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
  Par conséquent $\geqslant \left(a + n \times g(a))\right) + g\left(u_n\right) \geqslant a + n \times g(a) + g(a)$
  $= a + (n+1)g(a)$.
  La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} \geqslant a + n \times g(a)}$.

c) $a > 0$ donc $g(a) > g(0) = 0$.
On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(a + n \times g(a)\right) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \boxed{+\infty}$ d'après le théorème des gendarmes.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
D'après la question précédente, la suite $\left(u_n\right)$ tend vers $+\infty$.

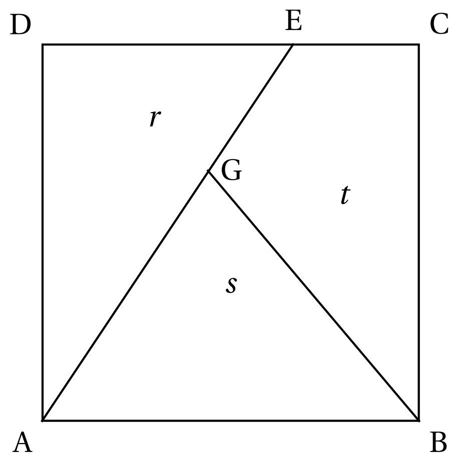
a) La partie à compléter de l'algorithme est :
Tant que $u \leqslant M$
u prend la valeur $\mathrm{e}^u\left(\mathrm{e}^u - 1\right)$
n prend la valeur $n+1$
Fin Tant que

b) Pour $M = 60$, on trouve $\boxed{n = 36}$

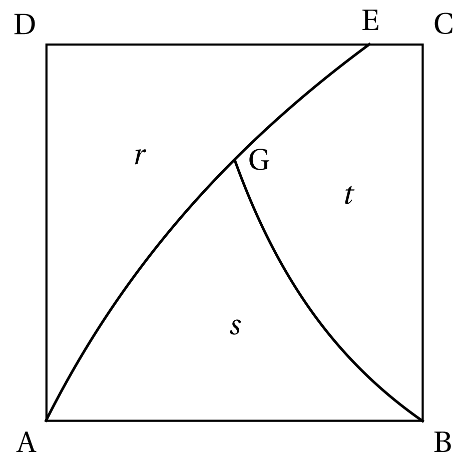
Exercice 4 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.

L'aire du triangle ADE est $\mathscr{A}(ADE) = \dfrac{\text{AD} \times \text{DE}}{2} = \dfrac{1 \times \text{DE}}{2}$. Comme cette aire vaut $\dfrac{1}{3}$, on obtient $\text{DE} + \dfrac{2}{3}$.

Le point E a pour coordonnées : $\boxed{\text{E}\left(\dfrac{2}{3} ; 1\right)}$.

Appelons H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle AGB.

L'aire du triangle AGB vaut : $\mathscr{A}(AGB) = \dfrac{AB \times GH}{2} = \dfrac{GH}{2}$. Comme cette aire vaut $\dfrac{1}{3}$, on obtient $GH = \dfrac{2}{3}$.

>l'ordonne de G vaut $y_G = \dfrac{2}{3}$.

L'équation de la droite (AE) est $y = \dfrac{3}{2}x$ puisque la droite passe par l'origine et que, pour $x = x_E = \dfrac{2}{3}$, on trouve $y = y_\text{E} = 1$.

L'abscisse de G x_G vérifie donc $\dfrac{3}{2}x_\text{G} = \dfrac{2}{3}$ donc $x_\text{G} = \dfrac{4}{9}$ Le point G a donc pour coordonnées : $\boxed{\text{G}\left(\dfrac{4}{9} ; \dfrac{2}{3}\right)}$

Partie B : étude de la proposition B

1. a) $f\left(x_{\text{E}}\right)=1 \iff \ln\left(2x_{\text{E}}+1\right)=1 \iff 2x_{\text{E}}+1=\text{e} \iff x_{\text{E}}=\dfrac{\text{e}-1}{2}$.

   b) G appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ donc $y_{\text{G}}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\left(2\times\dfrac{1}{2}+1\right)=\ln 2$.

   On doit alors avoir $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2$, c'est-à-dire $k\times\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\ln 2 \iff$

   $k=\ln 2$ donc $f(x)=\ln 2\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$

2. a) Soit $F : x \longmapsto F(x)=(x+0,5)\times\ln(2x+1)-x$ pour $x\geqslant 0$.

   $F'(x)=1\times\ln(2x+1)+(x+0,5)\times\dfrac{2}{2x+1}-1=\ln(2x+1)+\dfrac{2x+1}{2x+1}-1$

   $=\ln(2x+1)+1-1=\boxed{\ln(2x+1)=f(x)}$.

   F est bien une primitive de f.

   b) r est l'aire du domaine compris entre les courbes représentatives de la fonction $x\longmapsto 1$, de f et les droites d'équation $x=0$ et $x=\dfrac{\text{e}-1}{2}$.

   Ainsi : $r=\displaystyle\int_0^{\frac{\text{e}-1}{2}}(1-f(x))\,\text{d}x=\dfrac{\text{e}-1}{2}-\int_0^{\frac{\text{e}-1}{2}}f(x)\,\text{d}x=\dfrac{\text{e}-1}{2}-\left[F\left(\dfrac{\text{e}-1}{2}\right)-F(0)\right]$.

   $F\left(\dfrac{\text{e}-1}{2}\right)=\dfrac{\text{e}}{2}\times\ln\text{e}-\dfrac{\text{e}-1}{2}=\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{\text{e}}{2}-1}$

   $F(0)=0$

   On en déduit : $r=\dfrac{\text{e}-1}{2}-\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{\text{e}}{2}-1}$

3. $g(x)=\ln 2\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\ln 2\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$ donc une primitive G de g est définie par $\boxed{G(x)=\ln 2(\ln x-x)}$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s=[\ln(2)]^2+\dfrac{\ln(2)-1}{2}$.

   $\boxed{r\approx 0,359}$ et $\boxed{s\approx 0,327}$. On en déduit $t=1-(r+s)\approx\boxed{0,314}$.

   La proposition B vérifie donc les conditions impoées par le fabriquant.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : généralités

1. Soit $(x\,;\,y\,;\,z)$ un TP et soit p un entier naturel non nul.

   On a donc $x^2+y\text{Í}2=z^2$. Alors $(px)^2+(py)^2=p^2x^2+p^2y^2=p^2\left(x^2+y^2\right)$ $=p^2z^2=(pz)^2$ donc $(px\,;\,py\,;\,pz)$ est aussi un TP.

2. On suppose que $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est un TP donc $x^2 + y^2 = z^2$.
Supposons les trois entiers impairs. Alors $x \equiv 1\ [2]$, $y \equiv 1\ [2]$ et $z \equiv 1\ [2]$.
On a $x^2 \equiv 1\ [2]$, $y^2 \equiv 1\ [2]$ et $z^2 \equiv 1\ [2]$, d'où $x^2 + y^2 \equiv 0\ [2]$ donc on n'aurait pas $x^2 + y^2 = z^2$.
Les trois entiers ne peuvent pas être tous impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
$n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.

a) $\boxed{192 = 2^6 \times 3}$.

b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
$2x^2 = 2 \times \left(2^\alpha \times k\right)^2 = 2 \times 2^{2\alpha} \times k^2 = \boxed{2^{2\alpha+1} \times k^2}$

$z^2 = \left(2^\beta \times m\right)^2 = \boxed{2^{2\beta} \times m^2}$

c) Si $2x^2 = z^2$, alors $2^{2\alpha+1} \times k^2 = 2^{2\beta} \times m^2$ donc $2\alpha + 1 = 2\beta$ (unicité de la décomposition).
C'est impossible puisque $2\alpha + 1$ est impair et 2β est pair.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. $2015 = \boxed{5 \times 13 \times 31}$;
On connaît le TP $(3\ ;\ 4\ ;\ 5)$ donc $(13 \times 31 \times 3\ ;\ 13 \times 31 \times 4\ ;\ 13 \times 31 \times 5)$ est aussi un TP, donc $(1\,209\ ;\ 1\,612\ ;\ 2\,015)$ est aussi un TP.

2. On admet que, pour tout entier naturel n,
$(2n + 1)^2 + \left(2n^2 + 2n\right)^2 = \left(2n^2 + 2n + 1\right)^2$.
$2\,015 = \boxed{2 \times 1\,007 + 1}$.
Ainsi, d'après la remarque faite ci-dessus, le triplet
$\left(2\,015\ ;\ 2 \times 1\,007^2 + 2 \times 1\,007\ ;\ 2 \times 107^2 + 2 \times 107 + 1\right) =$
$(2\,015\ ;\ 2\,030\,112\ ;\ 2\,030\,113)$ est un TP.

3. a) On cherche x et z entiers tels que $z^2 - x^2 = 403^2$, c'est-à-dire
$(z - x)(z + x) = 169 \times 961$.
Résolvons le système $\begin{cases} z - x = 169 \\ z + x = 961 \end{cases}$
En additionnant et en soustrayant, on trouve $\boxed{z = 565}$ et $\boxed{x = 396}$.

b) Le triplet $(396\ ;\ 403\ ;\ 565)$ est un TP donc $(5 \times 396\ ;\ 5 \times 403\ ;\ 5 \times 565)$ est également un TP.
Par conséquent $(1\,980\ ;\ 2\,015\ ;\ 2\,825)$ est un TP.