Baccalauréat 2015 - S
Métropole - Réunion

Série S Obli. et Spé.
22 Juin 2015
Correction

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

La fonction f est continue donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[c\,;\,d]$, où c et d sont deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
On a donc :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \lambda \int_c^d e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$ est $x \mapsto \dfrac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}$ donc :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \lambda \left[\ \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\ \right]_c^d$$
$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{-\lambda}{\lambda}\left(e^{-\lambda d} - e^{-\lambda c}\right)$$

Soit

$$\boxed{P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}}$$

1. b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

On rappelle que la variable aléatoire X est à valeurs positives donc en passant à l'évènement contraire on a :

$$P(X > 20) = 1 - P(0 \leq X \leq 20)$$

Or d'après la question 1. :

$$P(X > 20) = 1 - \left(e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 20}\right)$$
$$P(X > 20) = 1 - \left(1 - e^{-20\lambda}\right)$$
$$P(X > 20) = e^{-20\lambda}$$

Or on cherche λ tel que $P(X > 20)$ soit égale à 0,05 soit :

$$P(X > 20) = 0,05 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,05$$

Et en composant par la fonction ln qui est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ on a :

$$P(X > 20) = 0,05 \Longleftrightarrow -20\lambda = \ln 0,05 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,05}{-20}$$

Ce qui nous donne arrondi au millième :

$$\boxed{\lambda = \frac{-\ln 0,05}{20} \approx 0,150}$$

1. c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.
D'après le cours on sait que :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{20}{-\ln 0,05} \approx 6,676}$$

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

1. d. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
En appliquant le résultat de la question **1.** on a :

$$P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \mathrm{e}^{-10\times 0,15} - \mathrm{e}^{-20\times 0,15} = \mathrm{e}^{-1,5} - \mathrm{e}^{-3}$$

$$\boxed{P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-1,5} - \mathrm{e}^{-3} \approx 0,173}$$

1. e. Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.
En utilisant la même méthode que lors de la question 2. on a :

$$\begin{aligned}
P(X > 18) &= 1 - P(0 \leq X \leq 18)\\
P(X > 18) &= 1 - \left(\mathrm{e}^{-\lambda\times 0} - \mathrm{e}^{-\lambda\times 18}\right)\\
P(X > 18) &= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-18\times 0,15}\right)\\
P(X > 18) &= \mathrm{e}^{-18\times 0,15}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X > 18) = \mathrm{e}^{-2,7} \approx 0,067}$$

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type $1,95$.

2. a. Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.
La variable Y suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type $1,95$ donc la calculatrice donne :

$$\boxed{P(20 \leqslant X \leqslant 21) \approx 0,015}$$

2. b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.
En passant à l'évènement contraire on a :

$$P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leq Y \leq 21)$$

La calculatrice donne alors directement :

$$\boxed{P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leq Y \leq 21) \approx 0,010}$$

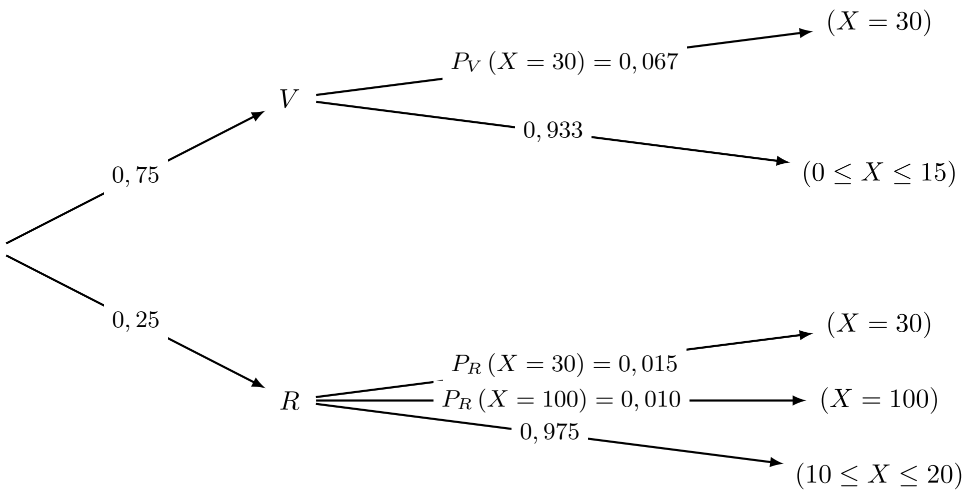
Partie 2

Chacun des clients reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

- Notons V l'évènement : « *Le client reçoit un bon d'achat de couleur verte* »
  et R l'évènement : « *Le client reçoit un bon d'achat de couleur rouge* ».
- « *Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.*
  Donc $P(V) = 0,75$ et $P(R = 0,25)$.
- Notons X la variable aléatoire qui donne la valeur du bon d'achat.
- « *Les bons d'achat verts prennent la valeur de* 30 *euros avec une probabilité égale à* $0,067$ *ou des valeurs comprises entre* 0 *et* 15 *euros avec des probabilités non précisées ici* »
  Donc $P_V\,(X = 30) = 0,067$.
- « *Les bons d'achat rouges prennent les valeurs* 30 *ou* 100 *euros avec des probabilités respectivement égales à* $0,015$ *et* $0,010$ *ou des valeurs comprises entre* 10 *et* 20 *euros avec des probabilités non précisées ici* ».
  Donc $P_R\,(X = 30) = 0,015$, $P_R\,(X = 100) = 0,010$ et $P_R\,(10 \leq X \leq 100) = 0,975$.

On peut résumer la situation à l'aide d'un arbre :



La probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge est donc :

$$P_R\,(X \geq 30) = P_R\,(X = 30) + P_R\,(X = 100)$$
$$P_R\,(X \geq 30) = 0,015 + 0,010$$

$$\boxed{P_R\,(X \geq 30) = 0,025}$$

2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut $0,057$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(X \geq 30) = P\Big((X \geq 30) \cap V\Big) + P(X \geq 30)$$
$$P(X \geq 30) = P(V) \times P_V(X \geq 30) + P(R) \times P_R(X \geq 30)$$
$$P(X \geq 30) = 0,75 \times 0,067 + 0,25 \times 0,025$$

$$\boxed{P(X \geq 30) = 0,0565 \approx 0,057}$$

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €. Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne. Ses doutes sont-ils justifiés ?

- **1. Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de $n = 200$ de clients. Il est constaté que 6 d'entre eux ont un bon d'achat d'une valeur supérieure à 30 euros.* ». Donc la fréquence observée est
  $$f = 6 \div 200 = 0{,}03 \text{ soit } \boxed{f = 0{,}03}$$
  - On a d'après la question précédente, $\underline{p = 0,057 = 5.7\%}$.
- **2. Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 200$, $p = 5{,}7\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 200 \geq 30 \\ \checkmark & np = 200 \times 0{,}057 = 11{,}4 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 200 \times 0{,}943 = 188{,}6 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}057 - 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}057 \times 0{,}943}}{\sqrt{200}}\ ;\ 0{,}057 + 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}057 \times 0{,}943}}{\sqrt{200}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}02487$. On arrondit la borne inférieure par défaut 10^{-3} près soit $\underline{0{,}024}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}08913$. On arrondit la borne supérieure par excès 10^{-3} près soit $\underline{0{,}09}$.

$$\boxed{I \approx [0{,}024\ ;\ 0{,}09]}$$

- **Conclusion**
  La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f = 0{,}03 \in I$ donc les doutes du directeur du magasin ne sont donc pas justifiés au seuil de confiance de 95%.

Exercice 2. Géométrie dans l'espace — 3 points

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points :

$$\text{A}(0\ ;\ -1\ ;\ 5),\ \text{B}(2\ ;\ -1\ ;\ 5),\ \text{C}(11\ ;\ 0\ ;\ 1),\ \text{D}(11\ ;\ 4\ ;\ 4).$$

1. 1. a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

Dans le repère orthonormé (O, I, J, K) on a :

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(0\ ;\ -1\ ;\ 5) \\ B\,(2\ ;\ -1\ ;\ 5)\end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$$

La droite (AB) est donc parallèle à la droite (OI).

1. b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.

- Dans le repère orthonormé (O, I, J, K) on a :

$$\left\{\begin{array}{l} C\,(11\ ;\ 0\ ;\ 1) \\ D\,(11\ ;\ 4\ ;\ 4)\end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} = 4\overrightarrow{OJ} + 3\overrightarrow{OK}$$

  La droite (CD) est donc incluse dans un plan parallèle à (OJK).

- Équation du plan $\mathcal{P}$.

  Le plan $\mathcal{P}$ est donc le plan passant par les points C et D et dont un vecteur normal est par exemple le vecteur $\overrightarrow{OI}$ puisqu'il est parallèle à (OJK). Or :

Propriété 1

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.\ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 1 :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-11\\y-0\\z-1\end{pmatrix}.\ \overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow (x-11)=0$$

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow x-11=0$$

$$\boxed{(\mathcal{P})\ :\ x-11=0}$$

1. c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point $\text{E}(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

- D'après la question **1a**, la droite (AB) est parallèle à la droite (OI). Or d'après la question **1b.**, la droite (OI) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
  Par conséquent la droite (AB) est également orthogonale à $\mathcal{P}$ et donc leur intersection est réduite à un point.
- Le point $\text{E}(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$ appartient bien au plan $\mathcal{P}$ car ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$\begin{cases} x_E - 11 & = 11 - 11 = 0 \\ y_E \in \mathbb{R} \\ z_E \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Le point $\text{E}(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$ appartient bien à la droite (AB) car les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(0\ ;\ -1\ ;\ 5) \\ E\,(11\ ;\ -1\ ;\ 5) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}11\\0\\0\end{pmatrix} = 11\overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{11}\,\overrightarrow{AE}$$

- **Conclusion** : la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point $\text{E}(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

1. d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

- Équation de (AB).
  La droite (AB) passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On a alors :

$$(AB) = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y+1\\z-5\end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \quad ,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

  Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\boxed{(AB)\ :\ \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases} \quad ,\ t \in \mathbb{R}}$$

- Équation de (CD).
  La droite (CD) passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{CM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{CD}$. On a alors :

$$(CD) = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-11\\y-0\\z-1\end{pmatrix} = k\,\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \quad ,\ k \in \mathbb{R} \right\}$$

  Une représentation paramétrique de la droite (CD) est donc :

$$\boxed{(CD)\ :\ \begin{cases} x = \quad 11 \\ y = 4k \\ z = 3k+1 \end{cases} \quad ,\ k \in \mathbb{R}}$$

- Vérifions si ces droites sont sécantes.
  Pour trouver l'éventuelle intersection des deux droites il faut chercher à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2t & = 11 \\ -1 & = 4k \\ 5 & = 3k+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t & = 5,5 \\ k & = -0,25 \\ k & = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

  Ce système n'a donc pas de solution et les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif. On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\,-1\,;\,5)$ et $N_t(11\,;\,0,8t\,;\,1+0,6t)$.

2. a. Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

Dans le repère orthonormé (O, I, J, K) le calcul de longueurs avec les formules usuelles est légitime :

$$\left\{\begin{array}{l} M_t\,(t\,;\,-1\,;\,5) \\ N_t\,(11\,;\,0,8t\,;\,1+0,6t) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix} 11-t \\ 0,8t+1 \\ 0,6t-4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\left|\overrightarrow{M_tN_t}\right|\right| = M_tN_t = \sqrt{(11-t)^2+(0,8t+1)^2+(0,6t-4)^2}$$

Soit en développant :

$$M_tN_t^2 = \left(121-22t+t^2\right)+\left(0,64t^2+1,6t+1\right)+\left(0,36t^2-4,8t+16\right)$$

D'où

$$\boxed{M_tN_t^2 = 2t^2-25,2t+138 \text{ u.a.}}$$

2. b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

La fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la distance M_tN_t étant positive, elle est minimale quand son carré est minimal. De fait, le minimum de M_tN_t est atteint quand $M_tN_t^2 = f(t)$ est minimale.

$$f : \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & f(t) = M_tN_t^2 = 2t^2-25,2t+138 \end{array}\right.$$

La fonction f est une fonction polynôme du second degré de la forme at^2+bt+c avec : $a=2\,;\ b=-25,2\,;\ c=138$.
Le coefficient $a=2>0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole (plus précisément la restriction d'une parabole aux points d'abscisse positive) de sommet le minimum, de coordonnées :

$$S\left(\alpha = \frac{-b}{2a}\,;\,f\left(\alpha\right)\right) \quad ; \quad \boxed{S\,(6,3\,;\,f(6,3))}$$

t	0	$\alpha = 6.3$	$+\infty$
f	138 ↘	$f\left(\alpha\right)$	↗ $+\infty$

De ce fait, la longueur M_tN_t est minimale pour $t = 6,3$ s.

Exercice 3. Obligatoire : Complexes — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation CE) d'inconnue z : $z^2 - 8z + 64 = 0$.

L'équation $z^2 - 8z + 64 = 0$ est une équation du second degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec : $a = 1$; $b = -8$; $c = 64$.
Le discriminent $\Delta = -192 < 0$ donc elle admet deux racines complexes conjuguées.

$$\boxed{z_1 = \frac{8 + 8\,\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 4 + 4\,\mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 4 - 4\,\mathrm{i}\sqrt{3}}$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.

2. a. Calculer le module et un argument du nombre a.

$$\left\{\begin{array}{lll} |a| & = 4\left|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right| & = 4\sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 8 \\ a & = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3} & = 8\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ & & = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{|a = 8| \text{ et } \arg a = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

2. b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

On a donc de suite

$$\boxed{a = 8\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}} \text{ et } b = \overline{a} = 8\,\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\,\pi}{3}}}$$

2. c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ de centre O dont on déterminera le rayon.

On a facilement

$$c = 8\,\mathrm{i} = 8\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}}$$

Donc

$$OA = OB = OC = |a| = |b| = |c| = 8$$

Les points A, B et C sont sur un même <u>cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 8</u>.

2. d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

Voir en fin d'exercice

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

3. a. Montrer que $b' = 8$.

On a vu lors de la question **2b** que :

$$b = 8\,\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\,\pi}{3}}$$

Donc :

$$b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8\,\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\,\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8\,\mathrm{e}^{0}$$

$$\boxed{b' = 8}$$

©ISSN 2272-5318

3. b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

On a :

$$a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8\,\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$$

Donc

$$\boxed{|a| = 8 \ \text{ et } \ \arg a = \frac{2\pi}{3} \ ; \ k \in \mathbb{Z}}$$

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

4. a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

- R est le milieu du segment [A′B] donc :

$$\left|\begin{array}{l} A'(a') \\ B(b) \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{a'+b}{2} = \frac{-4+4\mathrm{i}\sqrt{3}+4-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \boxed{r = 0}$$

- S est le milieu du segment [B′C] donc :

$$\left|\begin{array}{l} B'(b') \\ C(c) \end{array}\right\} \Rightarrow s = \frac{b'+c}{2} = \frac{8+8\,\mathrm{i}}{2} \Longrightarrow \boxed{s = 4+4\,\mathrm{i}}$$

4. b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

- Calcul de RS.

$$RS = |s - r| = |4 + 4\,\mathrm{i}\,| = 4\,|1 + \mathrm{i}\,| = \underline{4\sqrt{2}}$$

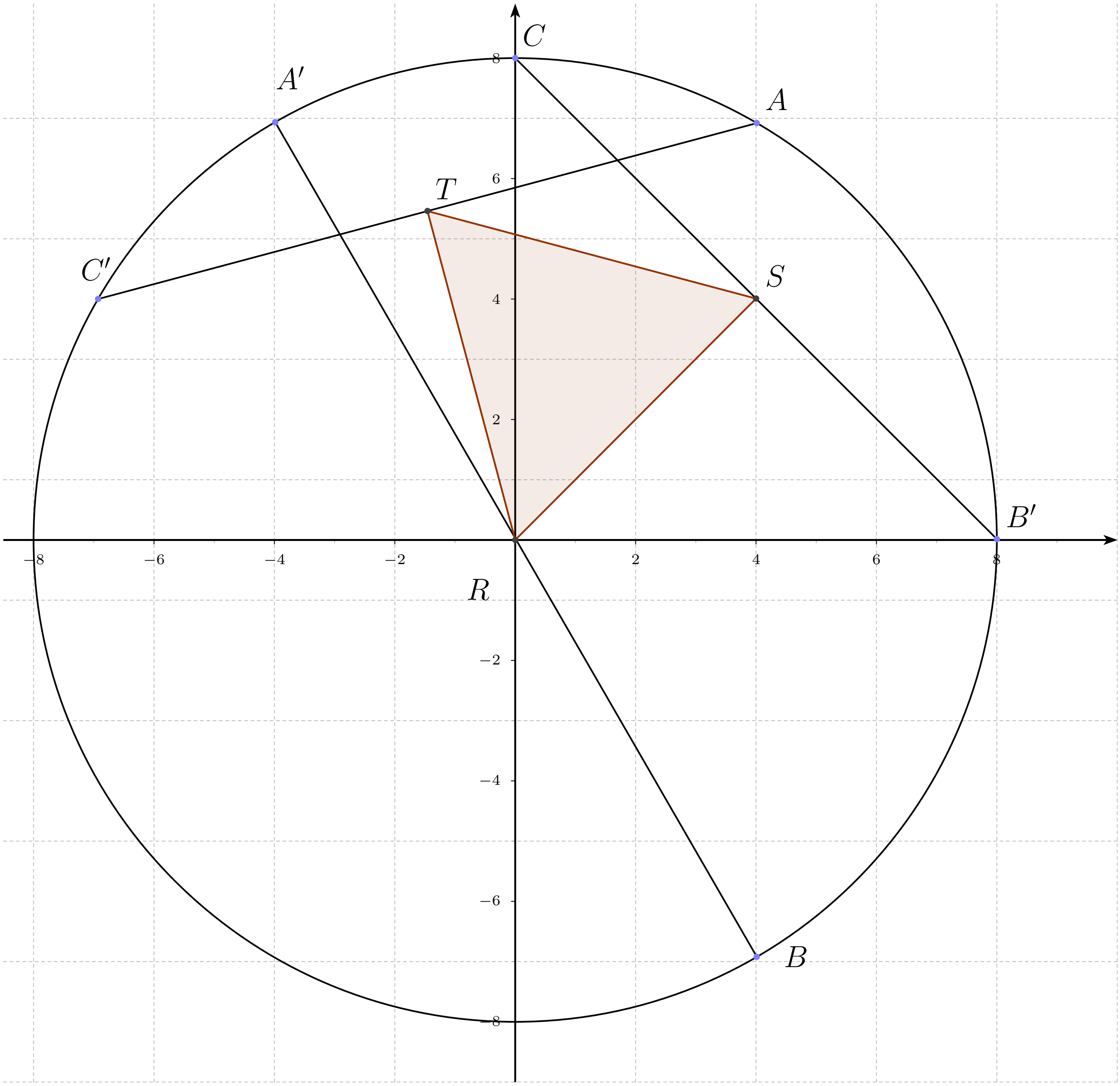
- Calcul de RT.

$$\begin{aligned} RT &= |t - r| = |t| = \left|2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)\right| \\ RT &= \sqrt{\left(2 - 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2} \\ RT &= \sqrt{4 - 8\sqrt{3} + 12 + 4 + 8\sqrt{3} + 12} \\ RT &= \sqrt{32} \\ RT &= \underline{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Calcul de TS.

$$\begin{aligned} TS &= |s - t| = \left|4 + 4\,\mathrm{i}\, - 2 + 2\sqrt{3} - \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)\right| \\ TS &= \sqrt{\left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2 - 2\sqrt{3}\right)^2} \\ TS &= \sqrt{4 + 8\sqrt{3} + 12 + 4 - 8\sqrt{3} + 12} \\ TS &= \sqrt{32} \\ TS &= \underline{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Par conséquent $RS = RT = ST$. Le triangle RST est donc équilatéral.


C
A'
A
T
C'
S
B'
R
B
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

Exercice 3. Spécialité : Arithmétique — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x - 5y = 1$.

1. a. Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).

Pour $x = 3$ et $y = 4$ on a :

$$7x - 5y = 7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$$

Donc le couple <u>(3 ; 4) est solution de (E)</u> .

1. b. Montrer que le couple d'entiers (x ; y) est solution de (E) si et seulement si $7(x - 3) = 5(y - 4)$.

- Si **(x ; y) est solution de (E)** alors :

$$\begin{cases} 7 \times x - 5 \times y = 1 & : (E_1) & : \text{car } (x \ , y) \text{ est solution de } (E) \\ \underline{7 \times 3 - 5 \times 4 = 1} & : (E_2) & : \text{car } (3 \ , 4) \text{ est solution de } (E) \end{cases}$$

  Par soustraction membre à membre :

$$7(x - 3) - 5(y - 4) = 0 \quad : \quad (E_1) - (E_2)$$

  Et de ce fait :

$$7(x - 3) = 5(y - 4)$$

- Si $\boldsymbol{7(x - 3) = 5(y - 4)}$ alors :

$$7(x - 3) = 5(y - 4) \iff 7x - 21 = 5y - 20 \iff \underline{7x - 5y = 1}$$

  Et donc $(x \ , y)$ est solution de (E)

- **Conclusion** :

$$\boxed{(x \ ; \ y) \text{ est solution de (E) si et seulement si } 7(x - 3) = 5(y - 4).}$$

1. c. Montrer que les solutions entières de l'équation CE) sont exactement les couples $(x \ ; \ y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x & = & 5k + 3 \\ y & = & 7k + 4 \end{cases} \quad \textbf{où } k \in \mathbb{Z}.$$

Rappelons le théorème de Gauss :

Théorème 2 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)

Soit a, b, c des entiers.

Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c.

Remarque : Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss énonce et prouve ce théorème (sous forme de lemme en fait) en 1801 dans son ouvrage « *Disquisitiones arithmeticae* ».

- Soit $(x \ ; \ y)$ un couple solution de (E), alors d'après la question **1b.** :

$$7(x - 3) = 5(y - 4) \tag{1}$$

  – L'égalité (1) implique que l'entier 7 divise $5(y - 4)$ en étant premier avec 5, donc d'après le théorème 2 dit de Gauss, 7 divise $y - 4$. Il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 7k$ ce qui équivaut à

$$y = 7k + 4 \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

  – L'égalité 1 implique aussi que l'entier 5 divise $7(x - 3)$ en étant premier avec 7, donc d'après le théorème 2 dit de Gauss, 5 divise $x - 3$. Il existe un entier relatif k' tel que $x - 3 = 5k'$ ce qui équivaut à

$$x = 5k' + 3 \ ; \ k' \in \mathbb{Z}$$

©ISSN 2272-5318

– En remplaçant les solutions dans l'égalité (1) on obtient :

$$7(x-3) = 5(y-4) \Longrightarrow 7 \times 5k' = 5 \times 7k \Longrightarrow k = k'$$

– Conclusion : si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de (E), alors :

$$\begin{cases} x &= 5k+3 \\ y &= 7k+4 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

- **Réciproquement**
  Soit $(x\ ;\ y)$ est un couple solution du système :

$$\begin{cases} x &= 5k+3 \\ y &= 7k+4 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

  Alors :

$$7x - 5y = 7 \times (5k+3) - 5 \times (7k+4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$$

  Donc $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de (E)
- **Conclusion**.
  Les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x &= 5k+3 \\ y &= 7k+4 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?
Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. On sait que $7x - 5y = 1$.
D'après la question **1.**, on peut dire que

$$x = 5k + 3 \text{ et } y = 7k + 4 \text{ avec } k \text{ entier relatif}$$

Le nombre de jetons est un entier positif, et ne doit pas dépasser 25 qui est le nombre total de jetons dans la boîte. On va tester les valeurs :

k	0	1	2
$x = 5k+3$	3	8	13
$y = 7k+4$	4	11	18
Jetons rouges	3	8	13
Jetons verts	4	11	18
Jetons blancs $(25 - x - y)$	18	6	$-6 < 0$ impossible

- Pour $k = 0$, $x = 3$ et $y = 4$; il peut donc y avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et $25 - 3 - 4 = 18$ jetons blancs.
- Pour $k = 1$, $x = 8$ et $y = 11$; il peut donc y avoir 8 jetons rouges, 11 jetons verts et $25 - 8 - 11 = 6$ jetons blancs.
- Les autres valeurs de k ne donnent pas de résultats répondant au problème. Prouvons-le.
  On cherche les valeurs de k telles que

$$0 \leq 5k + 3 \leq 25 \text{ et } 0 \leq 7k + 4 \leq 25 \text{ et } 0 \leq 25 - x - y \leq 25$$

  La dernière condition va directement nous donner les valeurs possibles de k. Il faut que le nombre de jetons blancs soit positif et inférieur à 25 soit :

$$0 \leq 25 - x - y \leq 25 \Longleftrightarrow 0 \leq 25 - (5k + 3 + 7k + 4) \leq 25 \Longleftrightarrow 0 \leq 18 - 12k \leq 25 \Longleftrightarrow \frac{7}{12} \leq k \leq 1,5$$

  Les seules valeurs possible de k sont donc 0 et 1 ce qui correspond bien aux cas ci-avant étudiés.

- **Conclusion**
  On ne peut donc avoir que :

$$\boxed{\begin{cases} \text{3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs} \\ \text{8 jetons rouges, 11 jetons verts et 6 jetons blancs} \end{cases}}$$

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$. Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n T$.

- Comme au départ c'est-à-dire pour $n = 0$, le pion est en A, on peut dire que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- D'après le sujet, on suppose qu'il y a *équiprobabilité*. Il y a 3 pions rouges sur 25 donc la probabilité de tirer un pion rouge est
$$p(R) = \frac{3}{25} = 0,12$$
On calcule de même la probabilité de tirer respectivement un pion vert et un blanc :
$$p(V) = \frac{4}{25} = 0,16 \text{ et } p(B) = \frac{18}{25} = 0,72$$
- On cherche la probabilité a_{n+1} qu'à l'étape $n+1$ le pion soit en A.
  - S'il était en A à l'étape n, il faut tirer une boule blanche pour qu'il y reste, ce qui se fait avec une probabilité de 0,72. Comme il avait une probabilité égale à a_n d'être en A à l'étape n, on retient $0,72a_n$.
  - S'il était en B à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à b_n d'être en B à l'étape n, on retient $0,12b_n$.
  - S'il était en C à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à c_n d'être en C à l'étape n, on retient $0,12c_n$.
  - De ce fait, pour tout entier n :
$$a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n$$
- On justifie de la même façon b_{n+1} et c_{n+1} et l'on a pour tout entier n :
$$\left\{\begin{array}{lclclcl} a_{n+1} & = & 0,72a_n & + & 0,12b_n & + & 0,12c_n \\ b_{n+1} & = & 0,12a_n & + & 0,72b_n & + & 0,16c_n \\ c_{n+1} & = & 0,16a_n & + & 0,16b_n & + & 0,72c_n \end{array}\right.$$
- Cela nous donne sous forme matricielle
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$$
soit
$$\boxed{X_{n+1} = X_n T \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}}$$

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$.

4. a. À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}}$$

4. b. Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

On va démontrer par récurrence sur n où ($n \geqslant 0$) la propriété

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad T^n = PD^nP^{-1}$$

- **Initialisation**
  On sait que $T^0 = I_3$ et
  $$PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$$
  La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie à un rang p ($p \geqslant 0$), c'est-à-dire $T^p = PD^pP^{-1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $p + 1$.
  $$T^{p+1} = T^p \times T$$
  d'après l'hypothèse de récurrence, $T^p = PD^nP^{-1}$ et on sait que $T = PDP^{-1}$. Donc
  $$\begin{aligned} T^{p+1} &= PD^pP^{-1} \times PDP^{-1} \\ T^{p+1} &= PD^p \underbrace{P^{-1}P}_{I_3} DP^{-1} \\ T^{p+1} &= PD^pI_3DP^{-1} \\ T^{p+1} &= P\underbrace{D^pD}_{D^{p+1}}P^{-1} \\ T^{p+1} &= PD^{p+1}P^{-1} \end{aligned}$$
  et donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

4. c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

La matrice D est une matrice diagonale ;

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}}$$

On note $\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n$ les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

5. a. Déterminer les nombres $a_n,\ b_n$, à l'aide des coefficients α_n et β_n. En déduire c_n.

Pour tout entier n on a :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ X_n = X_0 T^n \iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$X_n = X_0 T^n \iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_n = \alpha_n \text{ et } b_n = \beta_n}$$

Or comme à chaque étape, le pion est soit en A, soit en B, soit en C, $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n}$$

5. b. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Par théorème

Théorème 3

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

- On a pour tout entier n : $a_n = \alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$.
  De ce fait, ici $-1 < q = 0,6 < 1$ et d'après le théorème 3 :

  $$\lim_{n \to +\infty} \frac{7}{10} \times (0,6)^n = 0$$

  Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) :

  $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{10}}$$

- On a pour tout entier n : $b_n = \beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$

  Or ici avec $-1 < q_1 = 0,6 < 1$ et $-1 < q_2 = 0,56 < 1$, d'après le théorème 3 :

  $$\lim_{n \to +\infty} 77 \times (0,6)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} 40 \times (0,56)^n = 0$$

  Ce qui nous donne la limite de la suite (b_n) par sommation :

  $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{37}{110}}$$

- $c_n = 1 - a_n - b_n$ donc

  $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} c_n = 1 - \frac{3}{10} - \frac{37}{110} = \frac{4}{11}}$$

5. c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?

$$\left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n & = \dfrac{3}{10} = \dfrac{33}{110} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n & = \dfrac{37}{110} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n & = \dfrac{4}{11} = \dfrac{40}{110} \end{array}\right.$$

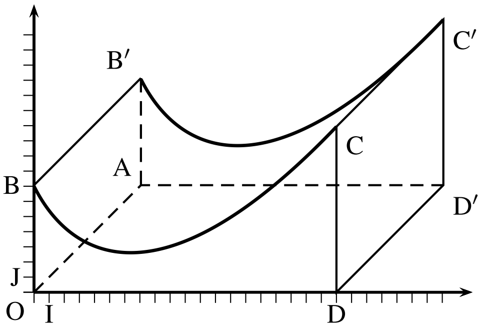
Or

$$\frac{40}{110} > \frac{37}{110} > \frac{33}{110}$$

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.

Exercice 4. Fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats



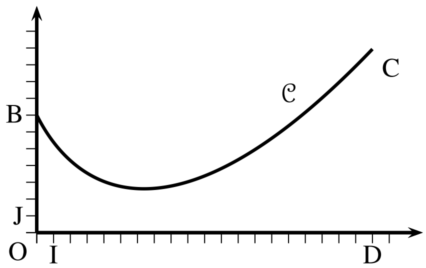
Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).



Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 20], on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

La fonction f est dérivable comme somme et composée de fonctions qui le sont.

$$f : \begin{cases} [0\,;\,20] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (x+1)\times\ln(x+1) - 3x + 7 \end{cases}$$

La fonction f est de la forme $uv + p$ donc de dérivée $u'v + uv' + p'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ f(x) = u(x)\times v(x) + p(x) \quad : \quad \begin{cases} u(x) = (x+1) & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x+1) & ; & v'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ p(x) = -3x+7 & ; & p'(x) = -3 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,20],\quad f'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) + p'(x) \\ f'(x) &= 1\times\ln(x+1) + (x+1)\times\frac{1}{x+1} - 3 \\ f'(x) &= \ln(x+1) + 1 - 3 \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ f'(x) = \ln(x+1) - 2}$$

©ISSN 2272-5318

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle [0 ; 20] et dresser son tableau de variation.

- On a pour tout réel $x \in [0\,;\,20]$:

$$f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) - 2 = 0$$
$$f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) = 2$$

En composant par la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 0 \iff x+1 = \mathrm{e}^{\,2}$$

soit

$$\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ \boxed{f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{\,2} - 1}$$

- En outre pour tout réel $x \in [0\,;\,20]$:

$$f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) - 2 > 0$$
$$f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) > 2$$

En composant par la fonction exp définie et croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) > 0 \iff x+1 > \mathrm{e}^{\,2}$$

soit

$$\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ \boxed{f'(x) > 0 \iff 20 \geq x > \mathrm{e}^{\,2} - 1}$$

En conséquence :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \iff 20 \geq x > \mathrm{e}^{\,2} - 1 \\ f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{\,2} - 1 \end{array}\right\} \implies f'(x) < 0 \iff 0 \leq x < \mathrm{e}^{\,2} - 1}$$

La fonction f est donc croissante sur $\left[e^2 - 1\,;\,20\right]$ et décroissante sur $\left[0\,;\,e^2 - 1\right]$.

On peut alors dresser le tableau de variations de f en calculant les valeurs aux bornes :

$$\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

x	0	$e^2 - 1$	20
$f(x)$	7	$10 - \mathrm{e}^{\,2} \approx 2,61$	$-53 + 21\ln 21 \approx 10,9$

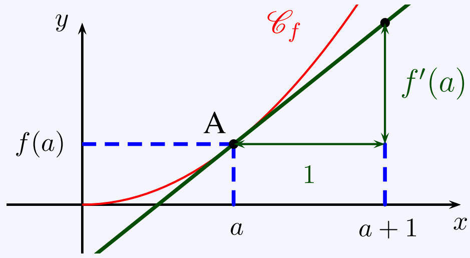
x	0		$e^2 - 1$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	7	$\searrow$	$10 - \mathrm{e}^{\,2}$	$\nearrow$	$-53 + 21\ln 21$

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Propriété 2 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{T\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



On a montré que :

$$\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ f'(x) = \ln(x+1) - 2$$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est donc donné par $f'(0)$ soit :

$$\boxed{f'(0) = \ln 1 - 2 = -2}$$

©ISSN 2272-5318

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 20] par : $g(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].

On a :

$$\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

Or :

- Une primitive de $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$ sur $[0\,;\,20]$ est g d'après les données de la question puisque $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
- Une primitive de $x \mapsto -3x+7$ sur $[0\,;\,20]$ est $x \mapsto -\dfrac{3}{2}x^2 + 7x$.
- De ce fait, une primitive de f sur $[0\,;\,20]$ est :

$$x \mapsto g(x) - \frac{3}{2}x^2 + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 7x$$

Soit en notant F une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20] :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x}$$

Partie 2

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.
Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

L'étude la la question **2. (Partie 1)** a permis d'établir les variations.

x	0		e^2-1		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	7	$\searrow$	$10 - \mathrm{e}^2$	$\nearrow$	$-53 + 21\ln 21 \approx 10.9$

La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est :

$$\boxed{f(20) - f(\mathrm{e}^2 - 1) \approx 8,32}$$

L'affirmation P1 est donc vraie.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.
La valeur absolue du coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en B (resp. C) est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B (resp. C).

On a donc l'inclinaison en calculant les valeur absolues des nombres dérivée en respectivement 0 et 20 :

$$\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ f'(x) = \ln(x+1) - 2$$

D'où

$$\begin{cases} f'(20) &= \ln(21) - 2 \approx 1,04 & \Rightarrow \text{ inclinaison en C } : |f'(20)| \approx 1,04 \\ f'(0) &= -2 & \Rightarrow \text{ inclinaison en B } : |f'(0)| \approx 2 \end{cases}$$

L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C car

$$|f'(0)| \approx 2 \times |f'(20)|$$

L'affirmation P2 est donc vraie.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre. Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

La surface à peindre est constituée des deux rectangles OAB'B et CDD'C et des deux parties de plans de même aire OBCD et AB'C'D'.

- Aire $\mathcal{A}_{OBCD}$:
L'aire de la surface OBCD correspond à l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 20$.

  Il s'agit donc, en mètres carré, de l'intégrale sur le segment $[0\,;\,20]$ de f soit :

$$\mathcal{A}_{OBCD} = \int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$$

  Or lors de la question **4. (Partie 1)**, on a déterminé une primitive de f, notée F soit :

$$\forall x \in [0\,;\,20]\ ;\ F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{OBCD} &= \Big[\ F(x)\ \Big]_0^{20} \\
\mathcal{A}_{OBCD} &= F(20) - F(0) = F(20) - 0 \\
\mathcal{A}_{OBCD} &= \frac{1}{2}(21)^2\ln(21) - \frac{7}{4} \times 20^2 + 130
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{OBCD} = \frac{441}{2}\ln(21) - 570\ m^2}$$

- Aire $\mathcal{A}_{OAB'B}$:
L'aire de OAB'B est celle d'un rectangle

$$\mathcal{A}_{OAB'B} = OA \times OB = 10 \times f(0) = 70 m^2$$

- Aire $\mathcal{A}_{DD'C'C}$:
L'aire de DD'C'C est celle d'un rectangle

$$\mathcal{A}_{DD'C'C} = DD' \times DC = 10 \times f(20) \approx 109,3 m^2$$

- Surface à peindre :

  La surface a peindre est donc de :

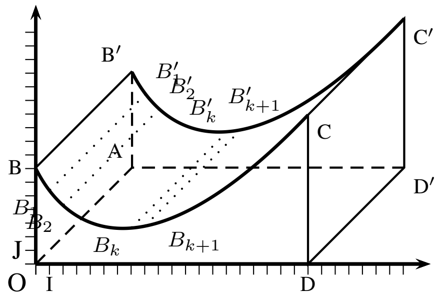
$$\boxed{\mathcal{A} = 2 \times \mathcal{A}_{OBCD} + \mathcal{A}_{OAB'B} + \mathcal{A}_{DD'C'C} = 651\ln(21) - 1\,600 \approx 381,9m^2}$$

  La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre. Or

$$\frac{\mathcal{A}}{5} \approx 76,38$$

  Il faut donc prévoir au minimum 77 litres de peinture.

3. Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\ ;\ f(k))$ pour k variant de 0 à 20. Ainsi, $B_0 = $ B.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$. Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B_k$ (voir figure).

2. a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}$.

Dans le repère orthonormé le calcul de longueurs avec les formules usuelles est légitime :

$$\left\{\begin{array}{l} B_k\,(k\ ;\ f(k)) \\ B_{k+1}\,(k+1\ ;\ f(k+1)) \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \overrightarrow{B_kB_{k+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(k+1) - f(k) \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\|\overrightarrow{B_kB_{k+1}}\right\| = B_kB_{k+1} = \sqrt{(1)^2 + (f(k+1) - f(k))^2}$$

Soit

$$\boxed{B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}\ \text{m}}$$

2. b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

L'aire de la partie roulante est donc approchée par la somme des aires des rectangles $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B'_k$ dont les aires sont

$$A_k = DD' \times B_kB_{k+1} = 10 \times B_kB_{k+1}$$

De ce fait :

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de $\boxed{0 \text{ à } 19}$ S prend pour valeur $\boxed{S + 10 \times \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}}$ Fin Pour
Sortie	Afficher $\boxed{S}$