Corrigé du baccalauréat S (spécialité) Polynésie 9 septembre 2015

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 7 points

Partie A

1. Soit u le nombre complexe $1 - \text{i}$.

   $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; donc $u = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{i}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right)$

   On cherche le réel α tel que $\left\{\begin{array}{rcl}\cos(\alpha) & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\alpha) & = & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ Donc $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

   L'écriture complexe du nombre $u = 1 - \text{i}$ est donc $\sqrt{2}\,\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{4}}$.

2. $\text{e}^{\text{i}\theta} = \cos(\theta) + \text{i}\sin(\theta)$ donc

   $\text{e}^{\text{i}\theta}(1 - \text{i}) = (\cos(\theta) + \text{i}\sin(\theta))(1 - \text{i}) = \cos(\theta) + \text{i}\sin(\theta) - \text{i}\cos(\theta) - \text{i}^2\sin(\theta)$

   $= (\cos(\theta) + \sin(\theta)) + \text{i}\,(\sin(\theta) - \cos(\theta))$ (forme algébrique)

   $1 - \text{i} = \sqrt{2}\,\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{4}}$ donc $\text{e}^{\text{i}\theta}(1 - \text{i}) = \text{e}^{\text{i}\theta} \times \sqrt{2}\,\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ (écriture exponentielle)

3. Le nombre complexe $\text{e}^{\text{i}\theta}(1 - \text{i})$ s'écrit d'une part $(\cos(\theta) + \sin(\theta)) + \text{i}\,(\sin(\theta) - \cos(\theta))$ et d'autre part $\sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}\left(\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

   En identifiant les parties réelles, on obtient : $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

   C'est un résultat que l'on peut retrouver directement en développant $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ *au moyen de la formule* $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \text{e}^{-x}\cos(x)$ $g(x) = \text{e}^{-x}$.
On définit la fonction h sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. D'après les graphiques :
   - **a.** On peut conjecturer que les limites des fonctions f et g en $+\infty$ sont égales à 0.
   - **b.** La courbe $\mathcal{C}_f$ semble située en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$.
   - **c.** L'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ semble maximal pour $x = 2$.

2. $g(x) - f(x) = \text{e}^{-x} - \text{e}^{-x}\cos(x) = (1 - \cos(x))\,\text{e}^{-x}$

   Pour tout réel x, $\text{e}^{-x} > 0$ et $\cos(x) \leqslant 1$ donc $(1 - \cos(x)) \geqslant 0$; donc, pour tout x, $g(x) - f(x) \geqslant 0$ et donc la courbe $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. - On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$; donc la courbe $\mathcal{C}_g$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

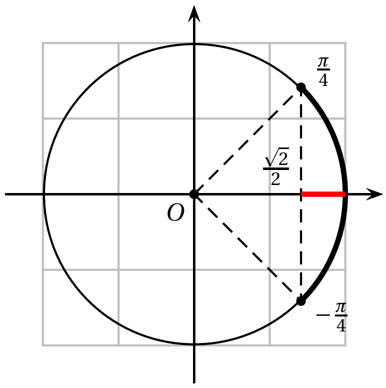
- Pour tout x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant +1$ et comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. **a.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0; +\infty[$ donc la fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$:
$h'(x) = g'(x) - f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \left(-\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + \mathrm{e}^{-x}(-\sin(x))\right) = \mathrm{e}^{-x}(-1 + \cos(x) + \sin(x))$
On a vu dans la partie A que, pour tout réel θ, $\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$, donc
$\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$.
On peut donc en déduire que $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

b.

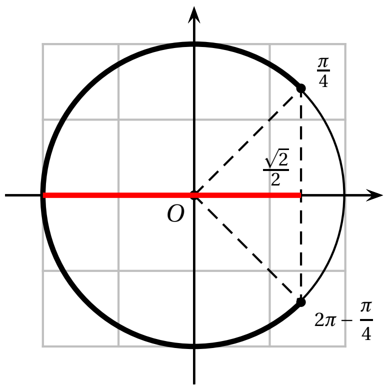
- On se place dans l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\\
&\iff -\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}\\
&\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1\\
&\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0
\end{aligned}$$



- On se place dans l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}~;~2\pi\right]$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi\\
&\iff \frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{4}\\
&\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1\\
&\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0
\end{aligned}$$



c. $h(x) = g(x) - f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - \cos(x))$
$h(0) = \mathrm{e}^{0}(1 - \cos(0)) = 1(1-1) = 0$
$h(2\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1 - \cos(2\pi)) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1-1) = 0$
$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}(1-0) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,21$
On en déduit le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
e^{-x}		$+$		$+$	
$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	0

5. On admet que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction H définie par $H(x)=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$ est une primitive de la fonction h. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=2\pi$.

On a démontré dans la question **2.** que, pour tout x, $g(x)-f(x)\geqslant 0$ donc on peut en déduire que $h(x)\geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

Donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire, est donnée par : $\mathscr{A}=\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x$

On sait que la fonction h est une primitive de la fonction h, donc :

$$\mathscr{A}=\int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = H(2\pi)-H(0)=\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\pi}[-2+\cos(2\pi)-\sin(2\pi)]-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{0}[-2+\cos(0)-\sin(0)]=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\pi}[-2+1]-\frac{1}{2}[-2+1]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\pi}\ \text{unité d'aire}$$

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu=40$ et d'écart-type $\sigma=8$.

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

La probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1} est $P(T\geqslant 60)$.

À la calculatrice, on trouve : $P(T\geqslant 60)\approx 0,006$.

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}.

On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée.

On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

D'après le texte, $\mu'=50$; et il faut chercher σ' pour que $P(T'\leqslant 43)=0,1$.

D'après le cours, on sait que si T' suit la loi normale de paramètres $\mu' = 50$ et σ', alors la variable aléatoire $Z' = \dfrac{T'-50}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite (moyenne 0 et d'écart type 1).

$T' \leqslant 43 \iff T'-50 \leqslant -7 \iff \dfrac{T'-50}{\sigma'} \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}$ donc

$P(T' \leqslant 43) = 0,1 \iff P\left(\dfrac{T'-50}{\sigma'} \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}\right) = 0,1 \iff P\left(Z' \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}\right) = 0,1$ sachant que la variable aléatoire Z' suit la loi normale centrée réduite.

À la calculatrice, pour $P(Z' \leqslant \beta) = 0,1$, on trouve $\beta \approx -1,2816$; on a donc : $-1,2816 = \dfrac{-7}{\sigma'}$ ce qui donne $\sigma' \approx 5,46$.

La variable aléatoire T' suit donc la loi normale de moyenne $\mu' = 50$ et d'écart type $\sigma' \approx 5,46$.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.

Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

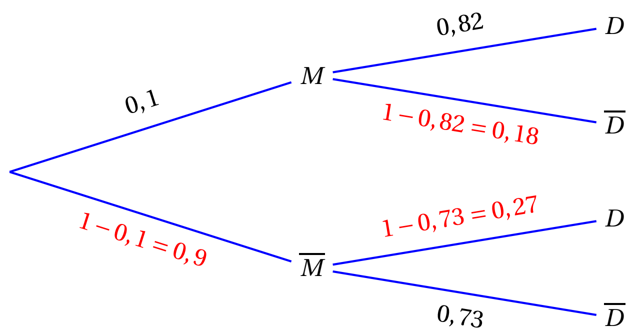
- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

On regroupe ces données dans un arbre pondéré :



1. On cherche $P(D)$; d'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(M \cap D) + P(\overline{M} \cap D) = P(M) \times P_M(D) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(D)$
$= 0,1 \times 0,82 + 0,9 \times 0,27 = 0,082 + 0,243 = 0,325$
2. $P_{\overline{D}}(M) = \dfrac{P(\overline{D} \cap M)}{P(\overline{D})}$
$P(\overline{D} \cap M) = P(M) \times P_M(\overline{D}) = 0,1 \times 0,18 = 0,018$ et $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,325 = 0,675$
Donc $P_{\overline{D}}(M) = \dfrac{0,018}{0,675} \approx 0,027$
La probabilité que le patient soit malade sachant que son test de dépistage est négatif est d'environ 0,027.
3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Il faut donc déterminer $P_D(M)$.
$P_D(M) = \dfrac{P(D \cap M)}{P(D)} = \dfrac{0,082}{0,325} \approx 0,252$
Une chance sur 4 correspond à 25 % soit 0,25 donc le malade a un peu plus d'une chance sur 4 d'avoir contracté la maladie.

Partie C

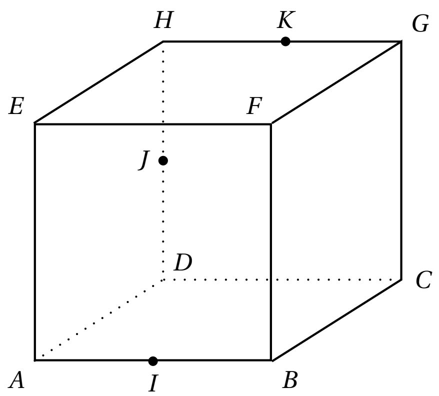
Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.
Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.
Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun. La proportion p de patients malades qui ont un dépistage positif est égale à 0,82 ; l'échantillon est de taille $n = 300$. Donc $n = 300 \geqslant 30$; $np = 300 \times 0,82 = 246 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 300 \times 0,18 = 54 \geqslant 5$
Les conditions sont donc vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des patients malades qui ont un test positif dans un échantillon de taille 300 :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,82 - 1,96\frac{\sqrt{0,82 \times 0,18}}{\sqrt{300}}\,;\, 0,82 + 1,96\frac{\sqrt{0,82 \times 0,18}}{\sqrt{300}}\right]$$

$$\approx [0,77\,;\,0,87]$$

Le dépistage se révèle positif pour 74 % de personnes à jeun soit avec une fréquence de $f = 0,74$.
$f = 0,74 \not\in I$ donc il ne faut pas pratiquer le test sur des personnes qui ne sont pas à jeun.

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 3 points



$ABCDEFGH$ est un cube.
I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[HD]$ et K est le milieu de $[HG]$.
On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On détermine les coordonnées tous les points de la figure dans le repère donné :
$A(0\,;\,0\,;\,0)$ $\quad B(1\,;\,0\,;\,0)$ $\quad D(0\,;\,1\,;\,0)$ $\quad E(0\,;\,0\,;\,1)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Longrightarrow C(1\,;\,1\,;\,0)$ $\quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow F(1\,;\,0\,;\,1)$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow H(0\,;\,1\,;\,1)$ $\quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow G(1\,;\,1\,;\,1)$

I est le milieu de $[AB]$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} x_I & = & \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I & = & \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I & = & \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{array}\right.$ et donc $I\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$

On trouve de même : $J\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $K\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_E - x_C & = & -1 \\ y_E - y_C & = & -1 \\ z_E - z_C & = & 1 \end{array}\right.$; celles de $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_J - x_I & = & -\dfrac{1}{2} \\ y_J - y_I & = & 1 \\ z_J - z_I & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

et celles de $\overrightarrow{IK}$ sont $\left\{\begin{array}{l c l} x_K - x_I &=& 0\\ y_K - y_I &=& 1\\ z_K - z_I &=& 1\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IJ} = (-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right) + (-1) \times 1 + 1 \times \dfrac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK} = 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{IK}$

Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ du plan (IJK), donc il est normal au plan (IJK).

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ sont $\left\{\begin{array}{l c r} x_D - x_B &=& -1\\ y_D - y_B &=& 1\\ z_D - z_B &=& 0\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD} = (-1)(-1) + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{BD}$

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est un vecteur normal au plan (IJK) donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

On pourrait préciser la réponse en démontrant que la droite (BD) n'est pas contenue dans le plan (IJK) mais ce n'est pas explicitement demandé dans le texte.

Si le point B appartient au plan (IJK), on peut dire que le point A, appartenant à la droite (BI), appartient aussi à ce plan donc les plans (ABD) et (IJK) sont confondus, ce qui est faux.

3. Soit M un point de la droite (CE) donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CE}$ (où $k \in \mathbb{R}$), ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l c l} x_M - x_C &=& k \times (-1)\\ y_M - y_C &=& k \times (-1)\\ z_M - z_C &=& k \times 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x_M &=& 1-k\\ y_M &=& 1-k\\ z_M &=& k\end{array}\right.$

Le plan (BDM) et le plan (IJK) sont parallèles, s'ils ont les mêmes vecteurs normaux; autrement dit pour que le plan (BDM) soit parallèle au plan (IJK) il faut et il suffit que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est normal au plan (IJK) soit également normal au plan (BDM).

Comme ce vecteur est déjà orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BD}$, il suffit qu'il soit orthogonal à un deuxième vecteur directeur du plan (BDM) non colinéaire à $\overrightarrow{BD}$, soit $\overrightarrow{BM}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\left\{\begin{array}{l c l c l} x_M - x_B &=& 1-k-1 &=& -k\\ y_M - y_B &=& 1-k-0 &=& 1-k\\ z_M - z_B &=& k-0 &=& k\end{array}\right.$

$\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CE} \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CE} = 0 \iff (-k) \times (-1) + (1-k) \times (-1) + k \times 1 = 0 \iff k - 1 + k + k = 0$
$\iff k = \dfrac{1}{3}$

Donc M a pour coordonnées $\left(1 - \dfrac{1}{3} ; 1 - \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Le nombre 6 a pour diviseurs positifs 1, 2, 3 et 6; donc $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.
Le nombre 7 n'a que 2 diviseurs, 1 et 7; donc $S(7) = 1 + 7 = 8$.

2. **a.** Tout nombre entier n supérieur ou égal à 2 a au moins 2 diviseurs, 1 et lui-même; donc $S(n) \geqslant 1 + n$.

b. Les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$ sont les entiers qui ont exactement 2 diviseurs : 1 et n; ce sont donc tous les nombres premiers.

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Si $n = p \times q$ où p et q sont deux nombres premiers distincts, alors les seuls diviseurs de n sont : 1, p, q et $p \times q$.
Donc $S(n) = 1 + p + q + pq = (1 + p) + q(1 + p) = (1 + p)(1 + q)$.

b. On considère la proposition suivante :
« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
L'ensemble des diviseurs de 4 est $\{1 ; 2 ; 4\}$ donc $S(4) = 1 + 2 + 4 = 7$.
On a déjà vu que $S(6) = 12$.
$4 \times 6 = 24$; les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24, donc $S(24) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 60$.
$S(4) \times S(6) = 7 \times 12 = 84$ est différent de $S(4 \times 6) = 60$.
La proposition est donc fausse.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a. Les diviseurs de $n = p^k$ sont $1, p, p^2, \ldots, p^k$.

b. La suite $(1, p, p^2, \ldots, p^k, \ldots)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison p ; on en déduit que $s(n) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^k = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$ d'après la formule qui donne la somme des premiers termes d'une suite géométrique : premier terme $\times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

5. On suppose que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

a.
- On suppose que l'entier naturel m s'écrit $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.
$\left(p^s \times p^{13-s}\right)\left(q^t \times q^{7-t}\right) = p^{13} \times q^7 \Leftrightarrow \left(p^s \times q^t\right)\left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) = n \Leftrightarrow m\left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) = n$.
On peut donc dire que m est un diviseur de n.
- Soit m est un diviseur de n. On décompose m en produit de facteurs premiers ; si r est un facteur premier de la décomposition de m, alors r divise $p^{13}q^7$ donc, d'après le théorème de Gauss, r divise p^{13} ou r divise q^7, donc $r = p$ ou $r = q$.
Donc m s'écrit $p^s \times q^t$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$.
Comme m est un diviseur de n, on peut écrire $n = m \times m'$ où m' est un autre diviseur de n qui peut donc s'écrire $m' = p^{s'} \times q^{t'}$. Or $n = p^{13} \times q^7$ et $n = m \times m'$.
On a donc $p^{13}q^7 = p^s q^t \times p^{s'} q^{t'}$ ce qui équivaut à $p^{13}q^7 = p^{s+s'} q^{t+t'}$.
D'après l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, on peut dire que $s + s' = 13$ et que $t + t' = 7$ et comme s, s', t et t' sont des entiers naturels, on peut en déduire que $s \leqslant 13$ et que $t \leqslant 7$.
Donc tout diviseur m de n s'écrit $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

Tous les diviseurs de n sont :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & p & p^2 & \ldots & p^i & \ldots & p^{13} \\
q & pq & p^2q & \ldots & p^iq & \ldots & p^{13}q \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q^j & pq^j & p^2q^j & \ldots & p^iq^j & \ldots & p^{13}q^j \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q^7 & pq^7 & p^2q^7 & \ldots & p^iq^7 & \ldots & p^{13}q^7
\end{array}$$

b. La somme des $14 \times 8 = 112$ diviseurs de n est :

$$\begin{aligned}
S(n) &= \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right) + \left(q + pq + p^2q + \ldots + p^{13}q\right) + \ldots + \left(q^7 + pq^7 + p^2q^7 + \ldots + p^{13}q^7\right) \\
&= \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right) + \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right)q + \ldots + \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right)q^7 \\
&= \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^7\right) = \frac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \frac{1 - p^8}{1 - p}
\end{aligned}$$

Annexe

Exercice 1