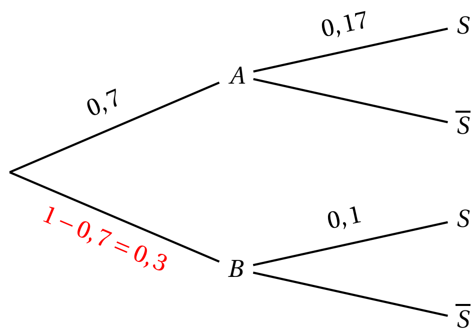
∽ Corrigé du baccalauréat S – Nouvelle-Calédonie ∾ 19 novembre 2015

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On regroupe les données de l'énoncé dans un arbre pondéré :



1. Il suffit de lire l'énoncé : $P(A\cap S) = P(A)\times P_A(S) = 0,7\times 0,17 = 0,119$.
2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A\cap S) + P(B\cap S) = 0,117 + P(B)\times P_B(S) \\ &= 0,119 + 0,3\times 0,1 = 0,149 \end{aligned}$$

3. La probabilité cherchée correspond à $P_S(A) = \dfrac{P(A\cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,119}{0,149} \approx 0,799$.
4. Soit p la proportion sur l'ensemble de la production de la source A de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire. La fréquence observée sur l'échantillon de taille $n = 1\,000$ est $f_{\text{obs}} = \dfrac{211}{1\,000} = 0,211$.
   Comme $n = 1\,000 \geqslant 30$, $nf_{\text{obs}} = 211 \geqslant 5$ et $n\left(1 - f_{\text{obs}}\right) = 789 \geqslant 5$, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et on peut proposer un intervalle de confiance au seuil de 95 % qui est :

$$\left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,179\,;\, 0,243]\,.$$

Partie B

1. Comme $\mu = 8$ et $\sigma = 1,6$, $P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$.
2. À la calculatrice, on trouve : $P(X \leqslant 6,5) \approx 0,174$.
3. La question revient à résoudre l'équation en σ : $P(Y \leqslant 6,5) = 0,1$.
   D'après le cours, si la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y-9}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
   $Y \leqslant 6,5 \iff Y - 9 \leqslant -2,5 \iff \dfrac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\dfrac{2,5}{\sigma} \iff Z \leqslant -\dfrac{2,5}{\sigma}$ donc
   $P(Y \leqslant 6,5) = 0,1 \iff P\left(Z \leqslant -\dfrac{2,5}{\sigma}\right) \leqslant 0,1$

On cherche, à la calculatrice, le réel β tel que $P(Z \leqslant \beta) = 0,1$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite ; on trouve $\beta \approx -1,282$.

$$\beta \approx -1,282 \iff -\frac{2,5}{\sigma} \approx -1,282 \iff \sigma \approx 1,95$$

Partie C

1. Comme $a\cos x \geqslant 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'aire du domaine cherchée correspond, en unités d'aire, à la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,\mathrm{d}x = a\big[\sin x\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\big(1-(-1)\big) = 2a$$

2. Le problème revient à résoudre l'équation en a :

$$2a - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \iff a - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0 \iff a(4-\pi a) = 0$$

Comme a est strictement positif, la seule solution possible est $a = \dfrac{4}{\pi} > 0$.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2$
$f_a'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$
$f_a'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à
$f_a(a+\ln 2) = \mathrm{e}^{a+\ln 2-a} - 2(a+\ln 2) + \mathrm{e}^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.

x	$-\infty$		$a+\ln 2$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		$\searrow$	$f_a(a+\ln 2)$	$\nearrow$	

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a+\ln 2) = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.
Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.
$\varphi'(a) = -2 + \mathrm{e}^a$;
   - $-2 + \mathrm{e}^a > 0 \iff \mathrm{e}^a > 2 \iff a > \ln 2$;
   - $-2 + \mathrm{e}^a < 0 \iff \mathrm{e}^a < 2 \iff a < \ln 2$;

   $\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$4-4\ln 2$	$\nearrow$	

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à
$\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Il suffit de prendre un contre-exemple pour montrer que (P_2) est fausse. Par exemple, le triplet (1; 1; 1) convient : $1^2+1^2+1^2=3\geqslant\dfrac{1}{3}$ mais $1+1+1=3\neq 1$.

Partie B

1. **a.** Il suffit de vérifier que les trois points non alignés B, D et E appartiennent au plan d'équation $x+y+z=1$.
   Avec $B\big(1;0;0\big)$, $D\big(0;1;0\big)$ et $E\big(0;0;1\big)$, c'est bien le cas :
   $$1+0+0=0+1+0=0+0+1=1$$
   b. Il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE). Prenons $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, par exemple. On a :
   $$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=-1+1+0=0\implies\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BD}$$
   $$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-1+0+1=0\implies\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BE}$$
   Donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c. D'après la question précédente, on sait que (AG) et (BDE) sont sécants en un unique point. Il suffit donc de prouver que K appartient à la droite et au plan.
   — Comme $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$, le point K appartient à (AG).
   — Comme $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=1$, le point K appartient à (BDE).
   Donc K est l'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).
2. Les côtés du triangle BDE sont les diagonales des faces du cube qui sont isométriques donc ils sont de même longueur et BDE est un triangle équilatéral.
3. **a.** Si M est un point du plan (BDE) distinct de K, d'après la question (**1b**), le triangle AMK est rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore, on a alors :
   $$AM^2=AK^2+MK^2$$
   Si $M=K$, la relation est encore vraie donc elle est vraie pour tout point M de (BDE).
   b. Comme $MK^2\geqslant 0$, la relation $AM^2\geqslant AK^2$ se déduit trivialement de la précédente.
   c. Soient x, y et z trois nombres réels vérifiant l'égalité $x+y+z=1$. Le point $M\big(x;y;z\big)$ appartient donc au plan (BDE).
   D'après (**3b**), on a alors $AM^2\geqslant AK^2$ qui s'écrit, avec les coordonnées :
   $$x^2+y^2+z^2\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$$
   L'implication (P_1) est donc vraie.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\begin{cases} d_1 &= \dfrac{1}{2}d_0 + 100 = 250 \\ a_1 &= \dfrac{1}{2}d_0 + \dfrac{1}{2}a_0 + 70 = 445 \end{cases}$

2. a. On obtient en sortie $D = 250$ et $A = 420$. Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question (**1**).

b. • Le problème de l'algorithme proposé est qu'il réutilise la variable D pour le calcul de A alors qu'elle a été modifiée. On corrige cela en utilisant une variable auxiliaire E, déclarée « nombre réel » dans l'initialisation :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D, A et E sont des réels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	E prend la valeur D
	D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$
	A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{E}{2} + 70$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

• On peut aussi plus simplement inverser les deux instructions d'affectation à A et à D :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D, A sont des réels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{D}{2} + 70$
	D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

3. a. Par définition, on a :

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}\left(d_n - 200\right) = \frac{1}{2}e_n$$

La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $e_0 = d_0 - 200 = 100$.

b. D'après la question précédente, on a $e_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n e_0 = 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{D'où } e_n = d_n - 200 \iff d_n = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$$

Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200$.

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 200.

4. **a.** $2n^2-(n+1)^2=\Big((\sqrt{2}-1)n-1\Big)\Big((\sqrt{2}+1)n+1\Big)$.

D'après les résultats de première sur les trinômes du second degré, $2n^2-(n+1)^2$ est donc positif pour $n\leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ ou $n\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\simeq 2,4$.

Donc, pour n entier supérieur à 3, on a $2n^2-(n+1)^2\geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$2n^2\geqslant (n+1)^2.$$

b. Pour $n=4$, on a bien $2^4=16\geqslant 4^2=16$ donc la propriété est initialisée.

Supposons qu'il existe un entier $k>4$ tel que $2^k\geqslant k^2$.

En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$2^{k+1}\geqslant 2k^2\geqslant (k+1)^2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Initialisée et héréditaire, la propriété $2^n\geqslant n^2$ est donc vraie pour tout entier supérieur ou égal à 4.

c. D'après la question précédente, si n est un entier supérieur ou égal à 4, on $0<n^2\leqslant 2^n$. En composant, cette inégalité par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en multipliant par 100, on obtient alors :

$$0<\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{n^2}\implies 0<100n\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant\frac{100n}{n^2}=\frac{100}{n}$$

d. D'après la question précédente et les théorèmes d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{100}{n}=0$ et d'après les résultats sur les limites des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$.

D'après les résultats sur les limites de sommes, on obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=340$$

EXERCICE 4 — 5 points

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** D'après l'énoncé, le nombre d'avancés au début du mois $n+1$ sera composé de la moitié des débutants du mois précédent passant au niveau avancé soit $\dfrac{1}{2}d_n$, de la moitié du nombre des avancés ne s'étant pas désinscrits soit $\dfrac{1}{2}a_n$ et des 70 personnes qui se sont inscrites en début du mois.

On obtient bien :

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{1}{2}a_n+70$$

b. En posant $U_n=\begin{pmatrix}d_n\\a_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}100\\70\end{pmatrix}$, le système s'écrit sous la forme matricielle :

$$U_{n+1}=Au_n+B$$

c. Pour $n=1$, on a bien $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(I_2+T\right)$.

Supposons que la relation soit vérifiée pour un certain entier k non nul.

En multipliant l'expression $A^k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(I_2+kT\right)$ par $A=\frac{1}{2}\left(I_2+T\right)$ à gauche ou à droite car I_2 et T commutent, on obtient :

$$A^{k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(I_2+kT\right)\times\frac{1}{2}\left(I_2+T\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(I_2+T+kT+kT^2\right)$$

Or, $T^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. On dit qu'elle est nilpotente d'ordre 2.

Donc $A^{k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(I_2+(k+1)T\right)$ et la relation est héréditaire.

La propriété est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2. a. Comme $\det(I_2-A)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\neq 0$, la matrice I_2-A est inversible et on a $(I_2-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\text{D'où } C=AC+B \iff (I_2-A)C=B \iff C &=(I_2-A)^{-1}B\\ &=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\ 340\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

b. Il suffit de se servir des question précédentes on remarquant que $\begin{pmatrix}200\\ 340\end{pmatrix}=C=AC+B$.

$$V_{n+1}=U_{n+1}-C \iff V_{n+1}=AU_n+B-(AC+B) \iff U_{n+1}=A(U_n-C)=AV_n$$

c. On a $V_0=U_0-C=\begin{pmatrix}300\\ 450\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}200\\ 340\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\ 110\end{pmatrix}$.

Par définition de V_n, on a aussi : $U_n=A^n\begin{pmatrix}100\\ 110\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}200\\ 340\end{pmatrix}$.

En utilisant le résultat de la question (**1c**), on obtient, par calcul matriciel :

$$\begin{aligned}U_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(I_2+nT\right)\begin{pmatrix}100\\ 110\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}200\\ 340\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0\\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 110\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}200\\ 340\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}100\left(\frac{1}{2}\right)^n+200\\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n+110\left(\frac{1}{2}\right)^n+340\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. a. En admettant que pour $n\geqslant 4$, $2^n\geqslant n^2>0$, en composant par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $0<\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{n^2}$.

En multipliant les membres de l'inégalité par $100n$, on obtient, après simplification :

$$0\leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant\frac{100}{n}.$$

b. D'après les théorèmes d'encadrement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100}{n} = 0$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'après les résultats sur les limites de suites géométriques de raison $\dfrac{1}{2}$, on sait aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

Enfin, d'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 200 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 110\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

La fréquentation se stabilise, à long terme, autour de 200 internautes débutants et 340 internautes avancés.