# Baccalauréat 2015 - S
# Nouvelle Calédonie

**Série S Obli. et Spé.**
**5 Mars 2015**
**Correction**

## Exercice 1. Étude de fonctions — 5 points

**Commun à tous les candidats**

**1. Étude du cas particulier $a = 2$**
**La fonction $f_2$ est donc définie pour tout $x$ réel par $f_2(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.**

**1. a. Étudier les variations de la fonction $f_2$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.**
**(*On ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition*.**

D'après l'énoncé la fonction $f_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f_2'(x) = \mathrm{e}^x - 2$$

- Or pour tout réel $x$ :

$$f_2'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x - 2 = 0$$
$$f_2'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x = 2$$

En composant par la fonction $\ln$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f_2'(x) = 0 \iff x = \ln 2$$

soit
$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \boxed{f_2'(x) = 0 \iff x = \ln 2}$$

- En outre pour tout réel $x$ :

$$f_2'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - 2 > 0$$
$$f_2'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f_2'(x) > 0 \iff x > \ln 2$$

soit
$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \boxed{f_2'(x) > 0 \iff x > \ln 2}$$

En conséquence :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f_2'(x) > 0 \iff x > \ln 2 \\ f_2'(x) = 0 \iff x = \ln 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f_2'(x) < 0 \iff x < \ln 2}$$

La fonction $f_2$ **est donc décroissante sur** $]-\infty\ ;\ \ln 2]$ **et croissante sur** $[\ln 2\ ;\ +\infty[$.
Le minimum de la fonction $f_2$ sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{f_2(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - 2 \times \ln 2 = 2 - 2\ln 2}$$

On a le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_2$ | | $\searrow$ | $2 - 2\ln 2$ | $\nearrow$ | |

**1. b. En déduire que $\Gamma$ et $\Delta_2$ n'ont pas de point d'intersection.**

Comme

$$f_2(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0,614 > 0$$

Le minimum de la fonction $f_2$ étant supérieur à zéro, on en déduit que la fonction $f_2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R}\;;\; \mathrm{e}^x - 2x > 0 \iff \boxed{\forall x \in \mathbb{R}\;;\; \mathrm{e}^x > 2x}$$

Donc la représentation graphique de la fonction $f_2$ est au dessus de la droite $\Delta_2$ d'équation $y = 2x$.

$\boxed{\Gamma \text{ et } \Delta_2 \text{ n'ont pas de point commun.}}$

**2. Étude du cas général où $a$ est un réel strictement positif**

**2. a. Déterminer les limites de la fonction $f_a$ en $+\infty$ et en $-\infty$.**

- **Limite en $+\infty$** :
  On a
  $$\forall x \in \mathbb{R}\;;\; f_a(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - a\right)$$
  On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} - a = +\infty$
  d'où :
  $$\left|\begin{array}{l} \bullet\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} - a = +\infty \\ \bullet\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty}$$
- **Limite en $-\infty$** :
  On a
  $$\forall x \in \mathbb{R}\;;\; f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax$$
  donc pour tout réel $a$ strictement positif :
  $$\left|\begin{array}{l} \bullet\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \bullet\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*\;;\; \displaystyle\lim_{x\to-\infty} ax = -\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par différence}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty}$$

**2. b. Étudier les variations de la fonction $f_a$ sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_a$ est $a - a\ln a$.**

Pour tout réel $a$ strictement positif, les fonctions $f_a$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\;;\; \forall x \in \mathbb{R}\;;\; f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a$$

On retrouve la même étude de signe que dans la question **1.**

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\;;\; \forall x \in \mathbb{R}\;;\; f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a$$

- Or pour tout réel $x$ et $a$ réel strictement positif :
  $$f_a'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x - a = 0$$
  $$f_a'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x = a$$
  En composant par la fonction $\ln$ définie sur $]0\;;\;+\infty[$, on a puisque $a > 0$ :
  $$f_a'(x) = 0 \iff x = \ln a$$
  soit
  $$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\;;\; \forall x \in \mathbb{R}\;;\; \boxed{f_a'(x) = 0 \iff x = \ln a}$$

- En outre pour tout réel $x$ :
  $$f_a'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - a > 0$$
  $$f_a'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > a$$
  En composant par la fonction $\ln$ définie et strictement croissante sur $]0\;;\;+\infty[$, on a avec $a > 0$ :
  $$f_a'(x) > 0 \iff x > \ln a$$
  soit
  $$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\;;\; \forall x \in \mathbb{R}\;;\; \boxed{f_a'(x) > 0 \iff x > \ln a}$$

En conséquence :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f_a'(x) > 0 \iff x > \ln a \\ f_a'(x) = 0 \iff x = \ln a \end{array}\right\} \implies f_a'(x) < 0 \iff x < \ln a}$$

La fonction $\boldsymbol{f_a}$ **est donc décroissante sur** $]-\infty\ ;\ \ln a]$ **et croissante sur** $[\ln a\ ;\ +\infty[$.
Le minimum de la fonction $f_a$ sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{f_a(\ln a) = \mathrm{e}^{\ln a} - a \times \ln a = a - a\ln a}$$

On a le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $\ln a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_a$ | $+\infty$ ↘ | $f_a(\ln a) = a - a\ln a$ | ↗ $+\infty$ |

**2. c. Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif $a$.**
Soit $a$ est un réel strictement positif on a :

$$a - a\ln a = a(1 - \ln a)$$

Donc puisque $a > 0$, le signe de $a - a\ln a$ dépend de celui de $(1 - \ln a)$

- Pour tout réel $a$ réel strictement positif :

  $$a - a\ln a = 0 \iff (1 - \ln a) = 0$$
  $$a - a\ln a = 0 \iff \ln a = 1$$

  En composant par la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$, on a :

  $$a - a\ln a = 0 \iff a = \mathrm{e}^1$$

  soit

  $$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ \boxed{a - a\ln a = 0 \iff a = \mathrm{e}^1}$$

- Pour tout réel $a$ réel strictement positif :

  $$a - a\ln a > 0 \iff (1 - \ln a) > 0$$
  $$a - a\ln a > 0 \iff \ln a < 1$$

  En composant par la fonction exponentielle définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ , on a :

  $$a - a\ln a > 0 \iff 0 < a < \mathrm{e}^1$$

  soit

  $$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ \boxed{a - a\ln a > 0 \iff 0 < a < \mathrm{e}^1}$$

En conséquence, pour $a$ réel strictement positif :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a - a\ln a > 0 \iff 0 < a < \mathrm{e}^1 \\ a - a\ln a = 0 \iff a = \mathrm{e}^1 \end{array}\right\} \implies a - a\ln a < 0 \iff a > \mathrm{e}^1}$$

**2. d. Déterminer selon les valeurs du réel $a$ le nombre de points communs à $\Gamma$ et $\Delta_a$.**

- **1er cas, $0 < a < \mathrm{e}$ et $f_a(\ln a) > 0$ : Pas de point d'intersection.**
  On a vu que
  $$f_a(\ln a) = a - a\ln a > 0 \iff 0 < a < \mathrm{e}$$
  Le minimum de la fonction $f_a$ est alors positif, donc comme à la question **1.**, la fonction $f_a$ est strictement positive et la courbe $\Gamma$ et la droite $\Delta_a$ n'ont pas de point commun.
- **2e cas, $a = \mathrm{e}$ et $f_a(\ln a) = f_{\mathrm{e}}(1) = 0$ : Un seul point d'intersection.**
  On a vu que
  $$f_a(\ln a) = a - a\ln a = 0 \iff a = \mathrm{e}$$
  Le minimum de la fonction $f_{\mathrm{e}}$ est alors zéro, donc la fonction $f_{\mathrm{e}}$ est positive, nulle uniquement en $\ln a = \ln \mathrm{e} = 1$ et la courbe $\Gamma$ et la droite $\Delta_{\mathrm{e}}$ ont un unique point d'intersection, le point $A$ d'abscisse 1, (la droite est tangente à la courbe) :
  $$\boxed{\Gamma \cap \Delta_{\mathrm{e}} = \{A(1\ ;\ \mathrm{e})\}}$$

- **3^e^ cas, $a > \mathrm{e}$ et $f_a(\ln a) < 0$ : Deux points d'intersection.**

| $x$ | $-\infty$ | $\beta$ | | $\ln a$ | | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_a$ | $+\infty$ | $\searrow$ 0 | $\searrow$ | $f_a(\ln a) < 0$ | $\nearrow$ | 0 $\nearrow$ | $+\infty$ |

On a vu que :

$$f_a(\ln a) = a - a\ln a < 0 \iff a > \mathrm{e}$$

Le minimum de la fonction $f_a$ est inférieur à zéro.

**Théorème 1** (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si $f$ est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

**Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln a]$ :**

- La fonction $f_a$ est **continue** (car dérivable) et **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln a]$ ;
- On a vu que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$ ;
- L'image par $f_a$ de l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln a]$ est $[f_a(\ln a)\ ;\ +\infty[$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car $f_a(\ln a) < 0$

  Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f_a(x) = k = 0$ admet une solution unique $\beta$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln a]$.

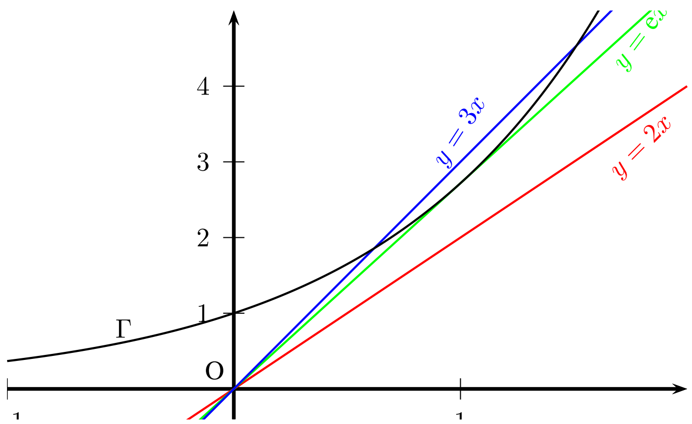
**Sur l'intervalle $[\ln a\ ;\ +\infty[$ :**

- La fonction $f_a$ est **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur l'intervalle $[\ln a\ ;\ +\infty[$ ;
- On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ ;
- L'image par $f_a$ de l'intervalle $[\ln a\ ;\ +\infty[$ est $[f_a(\ln a)\ ;\ +\infty[$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car $f_a(\ln a) < 0$

  Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f_a(x) = k = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $[\ln a\ ;\ +\infty[$.

**Conclusion** : Pour $a > \mathrm{e}$, les courbes $\Gamma$ et $\Delta_a$ admettent deux points d'intersection, les points B et C d'abscisses respectives $\alpha$ et $\beta$ tels que $\mathrm{e}^\alpha = 2\alpha$ et $\mathrm{e}^\beta = 2\beta$.

$$\boxed{\Gamma \cap \Delta_a = \{B(\alpha\ ;\ 2\alpha)\ ;\ C(\beta\ ;\ 2\beta)\}}$$

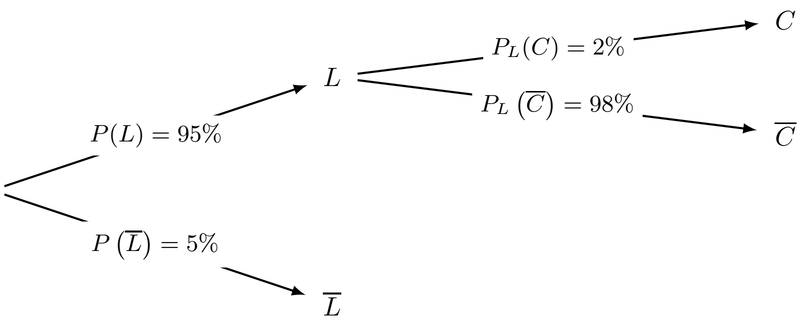


## Exercice 2. Probabilités 5 points

**Commun à tous les candidats**

À la sortie de fabrication, 5 % des puces présentent un défaut et sont donc éliminées. On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte. On note :

- $L$ : l'évènement « La puce est livrée ».
- $C$ : l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1 000 heures ».
  On peut résumer ces données à l'aide d'un arbre :




**1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.**

**1. a. Donner la valeur $P_L(C)$.**

Puisque $2\%$ des puces livrées ont une durée de vie courte, on a :

$$\boxed{P_L(C) = 0,02}$$

**1. b. Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?**

La probabilité cherchée est $P\left(L \cap \overline{C}\right)$, or par définition de la probabilité conditionnelle :

$$P\left(L \cap \overline{C}\right) = P(L) \times P_L\left(\overline{C}\right)$$

- On a d'après la question **1.a.** :
  $$P_L\left(\overline{C}\right) = 1 - P_L(C) = 1 - 0,02 = 0,98$$
- Et puisque « à la sortie de fabrication, 5 % des puces présentent un défaut » on a :
  $$P(L) = 1 - 5\% = 0,95$$

De ce fait :

$$\boxed{P\left(L \cap \overline{C}\right) = 0,95 \times 0,98 = 0,931}$$

**1. c. Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine ?**

Seules les puces livrées peuvent avoir une durée de vie courte. Les évènements $\left(\overline{L}\right)$ et $(L \cap C)$ sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned}
P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] &= P\left(\overline{L}\right) + P(L \cap C)\\
P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] &= 0,05 + P(L \cap C)\\
P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] &= 0,05 + P_L(C) \times P(L)\\
P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] &= 0,05 + 0,02 \times 0,95\\
P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] &= 0,05 + 0,019
\end{aligned}$$

$$\boxed{P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] = 0,069 = 6,9\%}$$

La probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine est de $\underline{0,069}$.

**2. On appelle $X$ la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce. On suppose que $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.**

**Définition 1**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire à densité $T$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ si sa densité de probabilité est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

**Propriété 1**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
Si $T$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ alors pour tout réel $a$ et $b$ tels que $0 \leq a \leq b$ :

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

**2. a. Montrer que $\lambda = \dfrac{-\ln(0,98)}{1\,000}$.**

On sait que

$$P(X \leqslant 1\,000) = 0,02$$

La *v.a.* $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, donc :

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 1\,000) = 1 - \mathrm{e}^{-1\,000\lambda} = 0,02 &\iff \mathrm{e}^{-1\,000\lambda} = 1 - 0,02 \\ &\iff \mathrm{e}^{-1\,000\lambda} = 0,98 \end{aligned}$$

Donc en composant pas la fonction $\ln$ qui est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient l'égalité :

$$-1\,000\lambda = \ln 0,98 \iff \boxed{\lambda = \frac{-\ln 0,98}{1\,000}}$$

**2. b. Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10 000 heures. On arrondira à $10^{-3}$ près.**

La probabilité cherchée est $P(X \geqslant 10\,000)$ or :

$$P(X \geqslant 10\,000) = \mathrm{e}^{-10\,000\lambda} = \mathrm{e}^{-10\,000 \times \frac{-\ln 0,98}{1\,000}}$$

Soit

$$\boxed{P(X \geqslant 10\,000) = \mathrm{e}^{10 \ln 0,98} \approx 0,817}$$

Environ **$81,7\,\%$ des puces ont une durée de vie supérieure ou égale à 10 000 heures**.

**2. c. Calculer $P(20\,000 \leqslant X \leqslant 30\,000)$. On arrondira à $10^{-3}$ près. Interpréter ce résultat.**

La *v.a.* $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, donc :

$$P(20\,000 \leqslant X \leqslant 30\,000) = \mathrm{e}^{-20\,000\lambda} - \mathrm{e}^{-30\,000\lambda} \approx 0,122$$

De ce fait **environ $12,2\,\%$ des puces ont une durée de vie comprise entre 20 000 et 30 000 heures**.

**3. La probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à $0,003$. On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées. On appelle $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.**

**3. a. Justifier que $Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$.**

Vérifions les hypothèses de validation d'un loi binomiale :

- Une puce a **2 états** : elle a une vie courte ou pas. La probabilité qu'elle ait une vie courte est :

$$p = P(C) = 0,003$$

- Il y a 15 000 « tirages ». Chaque tirage est **indépendant, identique et aléatoire**.

De ce fait, la variable aléatoire $Y$ désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière **indépendante**, de 15 000 **épreuves de Bernoulli** de paramètre $p = 0,003$.

La variable $Y$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$, notée $\mathscr{B}(15\,000\,;\ 0,003)$.

**3. b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y$.**

Puisque $Y \sim \mathscr{B}(15\,000\,;\ 0,003)$ on a :

$$E(Y) = n \times p = 15000 \times 0,003 = 45$$

Il y a environ **45 puces à durée de vie courte sur les 15 000 extraites** de la production.

**3. c. Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.**

On a puisque la $v.a.$ $Y$ est à valeurs entières

$$P(40 \leqslant Y \leqslant 50) = P(Y \leqslant 50) - P(Y < 40)$$
$$P(40 \leqslant Y \leqslant 50) = P(Y \leqslant 50) - P(Y \leqslant 39)$$

Soit à l'aide de la calculatrice

$$\boxed{P(40 \leqslant Y \leqslant 50) \approx 0,589}$$

**Remarque** : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.binomFdR}(15\,000, 0.003, 50) - \text{TIStat.binomFdR}(15\,000, 0.003, 39) \approx 0{,}588\,600\,122\,801$$

## Exercice 3. Géométrie dans l'espace — 5 points

**Commun à tous les candidats**

*On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.*

Soient le point $A_1$ de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On appelle $D_1$ la droite passant par $A_1$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$. On appelle $D_2$ la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$(D_2)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+k \\ y &=& -2k \\ z &=& 2 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{R}).$$

**1.**

**1. a. Donner une représentation paramétrique de $D_1$.**

La droite $D_1$ passant par le point $A_1$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{A_1M}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$. On a alors :

$$D_1 = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{A_1M}\begin{pmatrix}x-0\\y-2\\z+1\end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad ,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite $D_1$ est donc :

$$\boxed{D_1\ :\ \left\{\begin{array}{l} x = \ t \\ y = 2t+2 \\ z = 3t-1 \end{array}\right. \quad ,\ t \in \mathbb{R}}$$

**1. b. Donner un vecteur directeur de $D_2$ $\left(\text{on le notera } \overrightarrow{u_2}\right)$.**

On a d'après les données la représentation paramétrique de la droite $D_2$ :

$$D_2\ :\ \left\{\begin{array}{l} x = \ 1k+1 \\ y = -2k+0 \\ z = \ 0k+2 \end{array}\right. \quad ,\ k \in \mathbb{R}$$

Donc un vecteur directeur de $D_2$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}}$$

**1. c. Le point $A_2(-1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ appartient-il à $D_2$ ?**

Le point $A_2(-1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ appartient à $D_2$ si pour un $k$ donné, les coordonnées de $A_2$ vérifient l'équation paramétrique de la droite. Or pour $k = -2$ on retrouve bien les coordonnées du point $A_2$ :

$$\left\{\begin{array}{l} x = (-2)+1 = -1 \\ y = -2 \times (-2) = 4 \\ z = 2 \end{array}\right. \quad ;\ (k = -2)$$

**2. Démontrer que les droites $D_1$ et $D_2$ sont non coplanaires.**

- **Non parallèles**.
  Les vecteurs directeurs de $D_1$ et de $D_2$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

- **Sécantes**.
  Les droites $D_1$ et de $D_2$ sont sécantes s'il existe des réels $t$ et $k$ tels que :

$$\begin{cases} t &= 1+k \\ 2+2t &= 0-2k \\ -1+3t &= 2+0k \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 1+k \\ 2+2+2k &= 0-2k \\ -1+3+3k &= 2+0k \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 1+k \\ 4k &= -4 \\ 3k &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 1+k \\ k &= -1 \\ k &= 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc il n'existe pas de point commun aux deux droites, elles ne sont donc pas coplanaires.

$$\boxed{\text{Les droites } D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont donc non coplanaires et non sécantes.}}$$

**3. Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$. On définit la droite $\Delta_1$ passant par $A_1$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et la droite $\Delta_2$ passant par $A_2$ et parallèle à $\Delta_1$. Justifier que les droites $D_1$ et $\Delta_1$ sont perpendiculaires.**

Le point $A_1$ appartient aux droites $D_1$ et $\Delta_1$. Pour montrer qu'elles sont perpendiculaires il suffit de montrer que deux de leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v} = -6-6+12 = 0$$

Le produit scalaire des vecteurs directeurs des droites $D_1$ et $\Delta_1$ est nul, ils sont donc orthogonaux et **les droites $D_1$ et $\Delta_1$ sont bien perpendiculaires**.

**4. Soit $P_1$ le plan défini par les droites $D_1$ et $\Delta_1$ et $P_2$ le plan défini par les droites $D_2$ et $\Delta_2$.**

**4. a. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}17\\-22\\9\end{pmatrix}$. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $P_1$.**

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan $P_1$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires et non nuls de ce plan soit par exemple $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$ d'après la question **3.**. Or :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} &= -6-6+12 = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} &= 17\times(-6) - 22\times(-3) + 4\times 9 = -102+66+36 = 0 \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan $P_1$. Il est par conséquent normal à ce plan.

**4. b. Montrer que $P_1$ et $P_2$ ne sont pas parallèles.**

- La droite $\Delta_2$ est parallèle à $\Delta_1$ donc de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ par exemple.
- Le plan $P_2$ est défini par les droites $D_2$ et $\Delta_2$ de vecteurs directeurs respectifs $u_2$ et $\overrightarrow{v}$.
- Si les plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles, le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $P_1$ est aussi normal au plan $P_2$ ; il est donc orthogonal à tout vecteur non nul du plan $P_2$ comme $u_2$ et $\overrightarrow{v}$.
  On a bien
  $$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$
  mais
  $$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_2} = 17+44+0 = 61 \neq 0$$
  Donc $\overrightarrow{n}$ n'est pas normal au plan $P_2$ et **les deux plans $P_1$ et $P_2$ ne sont pas parallèles**.

**5. Soit $\Delta$ la droite d'intersection des plans $P_1$ et $P_2$. On admettra que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de $\Delta$. Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à $D_1$ et à $D_2$.**

La droite $\Delta$ est parallèle à $\Delta_1$ et $\Delta_2$. Or ces deux droites sont respectivement perpendiculaire à $D_1$ et $D_2$.

De ce fait la droite $\Delta$ est orthogonale aux droites $D_1$ et $D_2$.

Or la droite $\Delta$ appartient au plan $P_1$ et au plan $P_2$, qui ne sont pas parallèles. Elle est donc perpendiculaire aux droites $D_1$ et $D_2$.

**La droite $\Delta$ est donc perpendiculaire aux droites $D_1$ et $D_2$ .**

## Exercice 4. Non Spécialité 5 points

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On note $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites réelles définies, pour tout entier naturel $n$, par

$$u_0 = 1 \;\; v_0 = 0 \;\text{ et }\; \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{3}u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + \sqrt{3}v_n \end{cases} .$$

**1. Calculer les valeurs de $u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2$.**

On a :

- $u_1 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$
- $v_1 = 1 + \sqrt{3} \times 0 = 1$ ;
- $u_2 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 = 3 - 1 = 2$
- $v_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

$$\boxed{u_1 = \sqrt{3}\ ;\ v_1 = 1\ ;\ u_2 = 2\ ;\ v_2 = 2\sqrt{3}}$$

**2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de $u_N$ et $v_N$ pour un entier naturel $N$ donné.**

**2. a.** On donne l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Entrée : | $N$ est un nombre entier |
| Variables : | $K$ est un nombre entier |
| | $S$ est un nombre réel |
| | $T$ est un nombre réel |
| Initialisation : | Affecter 1 à $S$ |
| | Affecter 0 à $T$ |
| | Affecter 0 à $K$ |
| Traitement : | Tant que $K < N$ |
| | Affecter $\sqrt{3}S - T$ à $S$ |
| | Affecter $S + \sqrt{3}T$ à $T$ |
| | Affecter $K + 1$ à $K$ |
| | Fin Tant que |
| Sortie : | Afficher $S$ |
| | Afficher $T$ |

**Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 2$. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :**

| $S$ | $T$ | $K$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | 1 |
| $\sqrt{3} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} = \boxed{3 - \sqrt{3}}$ | $\left(3 - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \boxed{6 - \sqrt{3}}$ | $\boxed{2}$ |

**2. b. L'algorithme précédent affiche t-il les valeurs de $u_N$ et $v_N$ pour un entier $N$ donné ? Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de $u_N$ et $v_N$ pour un entier $N$.**

Les valeurs trouvées pour $N = 2$ ne correspondent pas à celles de $u_2$ et $v_2$.

L'algorithme n'affiche donc pas les valeurs de $u_N$ et $v_N$.

Une version modifiée de l' algorithme est par exemple :

| | |
|---|---|
| Entrée : | $N$ est un nombre entier |
| Variables : | $K$ est un nombre entier |
| | $S$ est un nombre réel |
| | $T$ est un nombre réel |
| | $U$ est un nombre réel |
| Initialisation : | Affecter 1 à $S$ |
| | Affecter 0 à $T$ |
| | Affecter 0 à $K$ |
| Traitement : | Tant que $K < N$ |
| | **Affecter $S$ à $U$** |
| | Affecter $\sqrt{3}U - T$ à $S$ |
| | Affecter $U + \sqrt{3}T$ à $T$ |
| | Affecter $K + 1$ à $K$ |
| | Fin Tant que |
| Sortie : | Afficher $S$ |
| | Afficher $T$ |

**3. On pose, pour tout entier naturel $n$, $z_n = u_n + \mathrm{i}v_n$. On note $a$ le nombre complexe $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.**

**3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $z_{n+1} = az_n$.**

Pour tout entier $n$ on a :

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= u_{n+1} + \mathrm{i}v_{n+1} \\
z_{n+1} &= \sqrt{3}u_n - v_n + \mathrm{i}\left(u_n + \sqrt{3}v_n\right) \\
z_{n+1} &= \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)u_n + \left(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1\right)v_n \\
z_{n+1} &= \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)u_n + \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\mathrm{i}\,v_n \\
z_{n+1} &= au_n + a\,\mathrm{i}\,v_n \\
z_{n+1} &= a\left(u_n + \mathrm{i}\,v_n\right) = az_n
\end{aligned}$$

Donc la suite $(z_n)$ est une suite géométrique de raison $a$ puisque :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; z_{n+1} = az_n}$$

**3. b. Écrire $a$ sous forme exponentielle.**

Le complexe $a$ pour module

$$|a| = \sqrt{3+1} = 2$$

D'où

$$a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

Soit

$$\boxed{a = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$$

**3. c. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ et $v_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$**

La suite $(z_n)$ est une suite géométrique de raison $a$ et de premier terme $z_0 = u_0 = 1$.

Par conséquent $z_n = a^n$ pour tout entier naturel $n$.

Et donc d'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; z_n = 2^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

Enfin en prenant la partie réelle et la partie imaginaire on obtient donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \\ v_n & = & 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \end{array}\right.}$$