Baccalauréat 2016 - S
Nouvelle Calédonie

Série S Obli. et Spé.
Mars 2016
Correction

Exercice 1. Probabilité — 6 points

Commun à tous les candidats

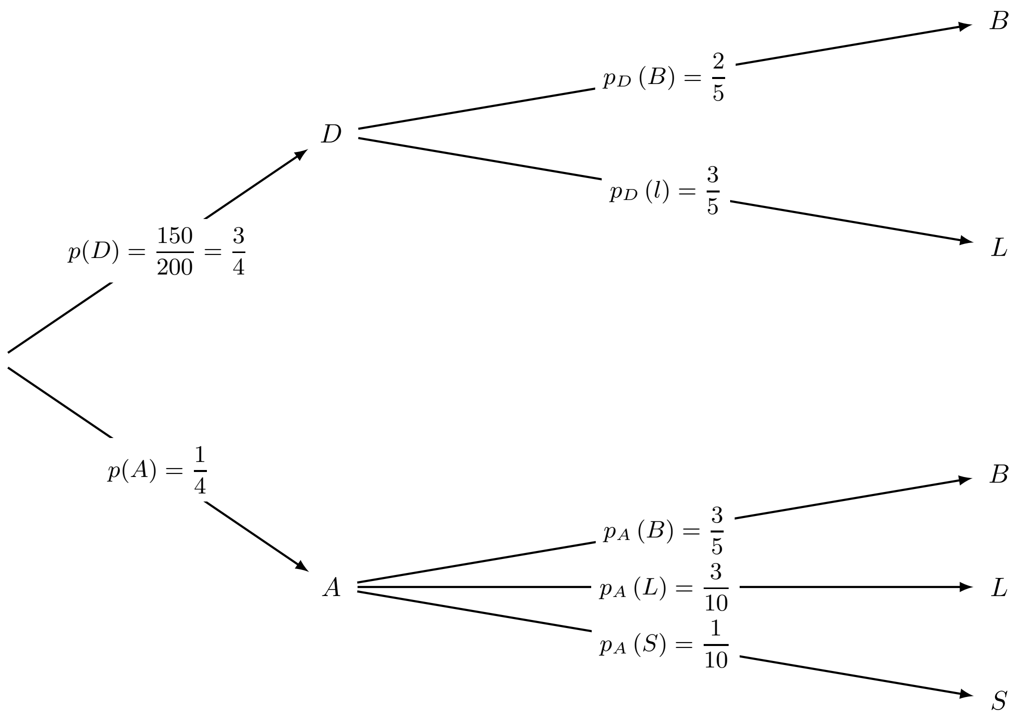
Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées. Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur. Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais. On tire au hasard une médaille. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

- A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ; D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;
- B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ; L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ; S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

1. a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
On va tout d'abord représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



On cherche la probabilité de l'évènement $(A \cap L)$ soit :

$$\boxed{p(A \cap L) = p(A) \times p_A(L) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}}$$

1. b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.

On cherche la probabilité de l'évènement L. On a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p(L) &= p(A \cap L) + p(D \cap L) \\
p(L) &= \frac{3}{40} + p(D) \times p_D(L) \\
p(L) &= \frac{3}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \\
p(L) &= \frac{3}{40} + \frac{9}{20}
\end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$\boxed{p(L) = \frac{21}{40}}$$

1. c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

On cherche la probabilité conditionnelle $p_L(A)$ soit :

$$\boxed{p_L(D) = \frac{p(L \cap D)}{p(L)} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{21}{40}} = \frac{6}{7}}$$

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

On cherche la probabilité conditionnelle $p_S(A)$ mais les médailles représentant le château de Saumur sont exclusivement argentées, de ce fait la probailité cherchée est celle de l'évènement certain :

$$\boxed{p_S(A) = 1}$$

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre $9,9$ et $10,1$ grammes. On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,06$. On note C l'évènement « la médaille est conforme ». Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

On cherche la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme donc que la variable aléatoire X ne soit pas comprise entre $9,9$ et $10,1$ grammes. De ce fait en passant par l'évènement contraire et en notant p_1 la probabilité cherchée on a :

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1 - p(9,9 \leq X \leq 10,1) \\
p_1 &\approx 1 - 0,9044
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{p_1 \approx 0,096}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$1 - \text{TIStat.normFDR}(9.9, 10.1, 10, 0.06) \approx 0{,}095\,58$$

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.

2. a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y - 10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?

Or par propriété :

 ©ISSN 2272-5318

Propriété 1

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

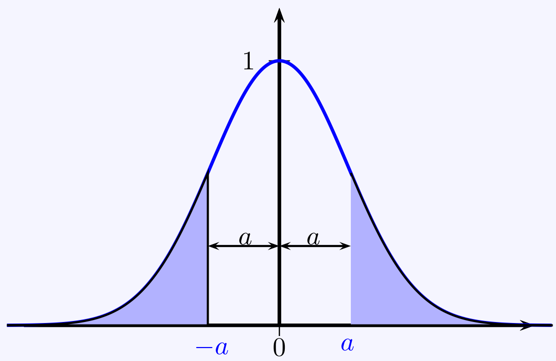
Puisque Y suit la loi normale $\mathcal{N}\left(10\ ;\ \sigma^2\right)$, la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y-10}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

2. b. Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.
On rappelle que :

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

- La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(X \leq t)$.
- Pour tout réel a on a :
  - $(1)\ :\ P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
  - $(2)\ :\ \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
  - $(3)\ :\ P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



Cette machine produit 6 % de pièces non conformes, donc on peut estimer que la probabilité que Y soit compris entre $9,9$ et $10,1$ est de $94\% = 0,94$. De ce fait on a :

$$\begin{aligned}
P(9,9 \leq Y \leq 10,1) = 0,94 &\Leftrightarrow P(-0,1 \leq Y - 10 \leq 0,1) = 0,94 \\
&\Leftrightarrow P\left(-\frac{0,1}{\sigma} \leq \frac{Y-10}{\sigma} \leq \frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,94 \\
P(9,9 \leq Y \leq 10,1) = 0,94 &\Leftrightarrow P\left(-\frac{0,1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,94
\end{aligned}$$

On applique alors l'égalité (3) de la propriété 2 puisque la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned}
P(9,9 \leq Y \leq 10,1) = 0,94 &\Leftrightarrow 2P\left(Z \leq \frac{0,1}{\sigma}\right) - 1 = 0,94 \\
&\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) = 1,94 \\
&\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{0,1}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,97
\end{aligned}$$

Avec la calculatrice on trouve alors :

$$\boxed{\frac{0,1}{\sigma} \approx 1,881 \Longleftrightarrow \sigma \approx 0,053}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.97) \approx 1{,}880\,8 \quad \text{et} \quad \frac{0.1}{\text{TIStat.invNorm}(0.97)} \approx 0{,}531\,7$$

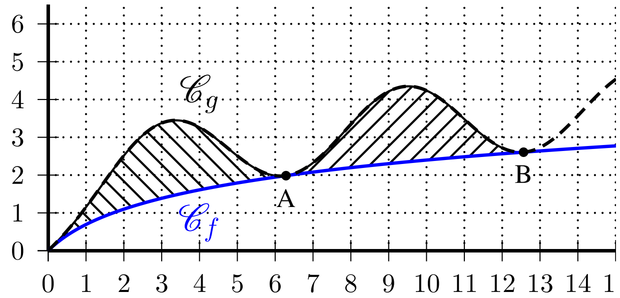
Exercice 2. (Recherche) Aire et fonctions — 3 points

Commun à tous les candidats

Les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0 ; 16] par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Comparer les aires des deux surfaces hachurées.



Les fonctions f et g sont deux fonctions continues sur $[0;16]$ en tant que composée et somme de fonction continues sur cet intervalle.

- Montrons que $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.
  Pour tout réel x,
  $$1 - \cos x \geq 0$$
  Donc pour tout réel x de $[0;16]$:
  $$g(x) = f(x) + (1 - \cos x) \geq f(x)$$
  De ce fait $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0;16]$.

- Points d'intersection des deux courbes.

  Les abscisses des points d'intersection des deux courbes sont les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = g(x)$, soit :
  $$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 1 - \cos x = 0 \\ &\iff x = 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
  Par conséquent l'abscisse de A est 2π et celle de B est 4π.

- Calcul des intégrales.
  On a montré que $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0;16]$ donc, exprimée en unités d'aire, les aires cherchées sont respectivement les intégrales sur $[0\ ;\ 2\pi]$ et sur $[2\pi\ ;\ 4\pi]$ de la fonction continue sur $[0;16]$:
  $$x \longmapsto g(x) - f(x) = 1 - \cos x$$
  Cette fonction admet comme primitive sur $[0;16]$, par exemple (c'est la primitive nulle en zéro) :
  $$x \longmapsto g(x) - f(x) = x - \sin x$$
  De ce fait on a facilement :
  $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x - \sin x]_0^{2\pi} \\ I_1 &= 2\pi \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} I_2 &= \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x - \sin x]_{2\pi}^{4\pi} \\ &= 4\pi - 2\pi \\ I_2 &= 2\pi \end{aligned}$$
  Les deux aires sont donc identiques, égales à 2π unités d'aire.

Exercice 3. 6 points

Commun à tous les candidats
Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A(1 ; 1 ; 1) appartient-il au plan P_m ?

Le point A(1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan soit :

$$A(1\ ;\ 1\ ;\ 1) \in P_m \Longleftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + (m-1) + \frac{1}{2}m - 3 = 0$$

Soit en multipliant l'égalité par 4 et en développant :

$$A(1\ ;\ 1\ ;\ 1) \in P_m \Longleftrightarrow m^2 + 6m - 16 = 0$$

On obtient une équation du second degré en m, de discriminant positif $\Delta = 100 > 0$ soit :

$$A(1\ ;\ 1\ ;\ 1) \in P_m \Longleftrightarrow (m = -8 \text{ ou } m = 2)$$

Le point A(1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si m vaut -8 ou 2.

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique :

$$(d)\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- Les plans P_1 et P_{-4} sont d'équations :

$$P_1\ :\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z - 3 = 0 \text{ et } P_{-4}\ :\ 4x - 5y - 2z - 3 = 0$$

- Vecteurs normaux et intersection.

  Un vecteur normal au plan P_1 est par exemple $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et un normal au plan P_{-4} par exemple $\overrightarrow{n_{-4}}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$.

  C'est deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plus ne sont pas parallèles et sont donc sécants en une droite.

- La droite (d) appartient-elle aux deux plans ?

  Pour P_1, on remplace x, y et z par les expression en t de équations de (d) . Avec $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \end{array}\right.$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z - 3 &= \frac{1}{4}(12-2t) + \frac{1}{2}t - 3\\ &= 3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t - 3\\ &= 0\end{aligned}$$

  Donc la droite (d) est incluse dans le plan P_1.

  Pour P_{-4}, on remplace x, y et z par les expression en t de équations de (d) . Pour $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \end{array}\right.$, on a :

$$\begin{aligned}4x - 5y - 2z - 3 &= 4(12-2t) - 5(9-2t) - 2t - 3\\ &= 48 - 8t - 45 + 10t - 2t - 3\\ &= 0\end{aligned}$$

  Donc la droite (d) est incluse dans le plan P_{-4}.

  Les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d).

3.

3. a. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

Le plan P_0 est d'équation $-y-3=0$ donc on cherche l'ensemble des points de (d) tels que $y=?3$:

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in P_0\cap(d) \iff \begin{cases} x &= 12-2t \\ y &= 9-2t \\ z &= t \\ y &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 12-2t \\ y &= -3 \\ z &= t \\ 9-2t &= -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 12-2t \\ y &= -3 \\ z &= t \\ t &= 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= -3 \\ z &= 6 \end{cases}$$

L'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B de coordonnées :

$$\boxed{B\,(0\,;\,-3\,;\,6)}$$

3. b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan $P_m\ :\ \dfrac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\dfrac{1}{2}mz-3=0$.

Pour $(x=0\ ;\ y=-3\ ;\ z=6)$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3 &= (m-1)\times(-3)+\frac{1}{2}m\times 6-3=0 \\ &= -3m+3+3m-3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc pour tout réel m, les coordonnées du point B vérifient l'équation du plan P_m et le point B appartient au plan P_m.

3. c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

Supposons qu'il existe un autre point noté B' qui appartienne à tout les plans P_m.

- D'après la question **(2.)**, ce point devrait donc appartenir aussi à la droite (d), intersection de P_1 et P_{-4}.
- Or d'après la question **(3.a.)**, la droite (d) et le plan P_0 n'ont que le point B comme intersection.
- De ce fait, le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que : $-10\leqslant m\leqslant 10$ et $-10\leqslant m'\leqslant 10$.
On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

4. a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

- Les plans P_1 et P_{-4} sont d'équations :

$$P_1\ :\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}z-3=0 \text{ et } P_{-4}\ :\ 4x-5y-2z-3=0$$

- Un vecteur normal au plan P_1 est par exemple $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et un normal au plan P_{-4} par exemple $\overrightarrow{n_{-4}}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$.

  On a :

$$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{n_{-4}}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}=1-1=0$$

- les deux vecteurs normaux sont orthogonaux, donc les plans P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

4. b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si :

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0.$$

- Les plans P_m et $P_{m'}$ sont d'équations :

$$P_m\ :\ \frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0 \text{ et } P_{m'}\ :\ \frac{1}{4}m'^2x+(m'-1)y+\frac{1}{2}m'z-3=0$$

- Un vecteur normal au plan P_m est par exemple $\overrightarrow{n_m}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}m^2\\ m-1\\ \frac{1}{2}m\end{pmatrix}$ et un normal au plan $P_{m'}$ par exemple $\overrightarrow{n_{m'}}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}m'^2\\ m'-1\\ \frac{1}{2}m'\end{pmatrix}$.

  On a :

$$\begin{aligned}
P_m\perp P_{m'} &\iff \overrightarrow{n_m}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}m^2\\ m-1\\ \frac{1}{2}m\end{pmatrix}\perp\overrightarrow{n_{m'}}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}m'^2\\ m'-1\\ \frac{1}{2}m'\end{pmatrix}\\
&\iff \overrightarrow{n_m}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}m^2\\ m-1\\ \frac{1}{2}m\end{pmatrix}.\overrightarrow{n_{m'}}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}m'^2\\ m'-1\\ \frac{1}{2}m'\end{pmatrix}=0\\
&\iff \left(\frac{1}{4}\right)^2m^2m'^2+(m-1)(m'-1)+\frac{mm'}{4}=0
\end{aligned}$$

  Soit :

$$\boxed{P_m\perp P_{m'}\iff\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0}$$

4. c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\boxed{\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0}$
	Alors Afficher $(m\ ;\ m')$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?
La condition de la ligne 4 de l'algorithme correspond à celle de la question **(4.b.)** en multipliant les deux membres par $16=4^2$:

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0\iff\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$$

Cet algorithme fournit donc tous les couples $(m\ ;\ m')$ d'entiers appartenant à $[-10\ ;\ 10]$ pour lesquels les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

4. d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1)$ et $(5\ ;\ -4)$. Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.
Par symétrie, si un couple $(m\ ;\ m')$ vérifie la condition, alors le couple symétrique $(m'\ ;\ m)$ la vérifie également. Les six couples d'entiers sont donc dans l'ordre d'affichage :

$$\boxed{(-4\ ;\ 1)\ ;\ (-4\ ;\ 5)\ ;\ (0\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ -4)\ ;\ (1\ ;\ 0)\ ;\ (5\ ;\ -4)}$$

Exercice 4. Obligatoire 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ de l'annexe 2.

1. 1. a. Vérifier que $1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

$$\left|1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right|^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \Longrightarrow \left|1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Et

$$1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right)$$

On cherche θ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right| \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k2\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})$$

On a donc

$$\boxed{1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}}$$

1. b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 & = & \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_0 = \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \times 1 = 1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ z_2 & = & \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_1 = \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \left(1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}} \\ \boxed{z_2 = \dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}} \end{array}\right.$$

2. 2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, Soit P_n la propriété $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$

- **Initialisation** : Pour $n = 0$,

$$z_0 = 1 \text{ et } \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0\times\frac{\pi}{6}} = 1$$

  Donc P_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose P_p vraie pour $p \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$z_p = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,p\,\frac{\pi}{6}}$$

  Alors

$$z_{p+1} = \left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_p = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,p\,\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{p+1} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(p+1)\,\frac{\pi}{6}}$$

- **Conclusion** : la propriété es vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\,\frac{\pi}{6}}}$$

2. b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Les points $O(0)$ et $A_0(1)$ étant situés sur l'axe des réels, les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si le point A_n est lui aussi sur l'axe des réels.

Cela ce traduit par le fait que son affixe soit réelle, donc que son argument soit $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Un argument de z_n est $n\frac{\pi}{6}$, on a alors :

$$\boxed{A_0 \text{ et } A_n \text{ alignés} \iff n\frac{\pi}{6} = k\pi \iff n = 6k\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

Les points O, A_0 et A_n sont alignés si n est un multiple de 6.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

3. a. Interpréter géométriquement d_n.

Pour tout entier n on a :

$$d_n = |z_{n+1} - z_n|$$

Donc d_n représente la distance entre les points A_n et A_{n+1} :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ d_n = A_n A_{n+1}}$$

3. b. Calculer d_0.

$$d_0 = z_1 - z_0 = \left|1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \Longrightarrow \boxed{d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

3. c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$.

Pour tout entier naturel n non nul,

$$\left\{\begin{array}{l} z_{n+2} = \left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} \\ z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n \end{array}\right| \underset{\text{Par soustraction}}{\Longrightarrow} \boxed{z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)}$$

3. d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n, $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

On en déduit que :

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n$$

Donc on peut dire que la suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout entier n.

$$\boxed{d_n = d_0 \times q^n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$$

4. 4. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

D'après les questions précédentes, pour tout n :

$$|z_n| = \left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

donc

$$|z_n|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

De même

$$|z_{n+1}| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$$

donc

$$|z_{n+1}|^2 = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

donc

$$d_n^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \boxed{|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = |z_{n+1}|^2}$$

4. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

On sait que pour tout entier n ,

$$|z_{n+1}| = OA_{n+1} \text{ et } |z_n| = OA_n$$

Or pour tout entier n

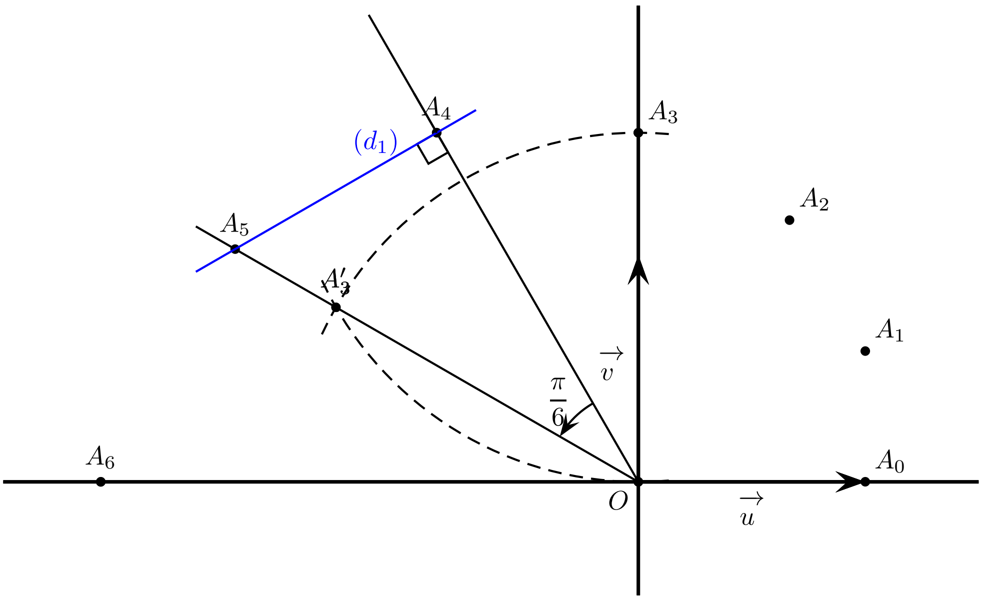
$$d_n = A_nA_{n+1}$$

Donc l'égalité démontrée lors de la question **(4.a.)** équivaut à :

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2 \iff OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$$

De ce fait, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

4. c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.



4. d. Justifier cette construction.

- Puisque d'après la question **(4.b.)** le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4, le point A_5 est sur la droite perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4. On trace donc cette droite (d_1) en bleu.
- z_5 a pour argument $\frac{5\pi}{6}$ et z_3 a pour argument $\frac{3\pi}{6}$; donc l'angle $\left(\overrightarrow{OA_3}\,,\,\overrightarrow{OA_5}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$. On trace donc le triangle équilatéral direct $OA_3A'_3$ et le point A_5 appartient à (OA'_3).
- Le point A_5 est à l'intersection des droites d et (OA'_3).

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

1. Coder la lettre L.

La lettre L correspond à $x = 11$; or

$$7\times 11+5 = 82 = 4\ [26]$$

Le nombre 4 correspond à E donc la lettre L est codée E.

2. 2. a. Soit k un entier relatif. Montrer que si $k\equiv 7x\ [26]$ alors $15k\equiv x\ [26]$.

Soit k entier relatif,

$$k\equiv 7x\ [26] \implies 15k\equiv 15\times 7x\ [26]$$

Or

$$15\times 7 = 105 = 4\times 26+1 \Longrightarrow 105\equiv 1\ [26]$$

Donc

$$k\equiv 7x\ [26] \implies \left\{\begin{array}{l} 15k\equiv \underbrace{15\times 7}_{105}x\ [26] \\ 105\equiv 1\ [26] \end{array}\right. \Bigg| \implies 15k\equiv x\ [26]$$

D'où

$$\boxed{k\equiv 7x\ [26] \implies 15k\equiv x\ [26]}$$

2. b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

Soit k entier relatif,

$$15k\equiv x\ [26] \implies \underbrace{15\times 7}_{105}k\equiv 7x\ [26]$$

Or, on a vu que

$$105\equiv 1\ [26]$$

donc

$$105k\equiv k\ [26]$$

Donc

$$\boxed{15k\equiv x\ [26] \implies k\equiv 7x\ [26]}$$

On a donc démontré que :

$$\boxed{15k\equiv x\ [26] \iff k\equiv 7x\ [26]}$$

2. c. En déduire que $y\equiv 7x+5\ [26]$ équivaut à $x\equiv 15y+3\ [26]$.

$$y\equiv 7x+5\ [26] \Longleftrightarrow \underbrace{y-5}_{k}\equiv 7x\ [26]$$

Or on a montré que $15k\equiv x\ [26] \iff k\equiv 7x\ [26]$ donc avec $k=y-5$:

$$\begin{aligned} y\equiv 7x+5\ [26] &\Longleftrightarrow 15(y-5)\equiv x\ [26] \\ &\Longleftrightarrow 15y-75\equiv x\ [26] \end{aligned}$$

Or $-75\equiv 3\ [26]$ donc :

$$\boxed{y\equiv 7x+5\ [26] \iff 15y+3\equiv x\ [26]}$$

3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

D'après les questions précédentes, pour décoder une lettre, on cherche à quel nombre y elle correspond, puis on détermine x entre 0 et 25 tel que $y \equiv 7x+5 \;\; [26]$ donc tel que $x \equiv 15y+3 \;\; [26]$.

La lettre F correspond à $y=5$; $15y+3=78$ qui a pour reste 0 dans la division par 26.

Le nombre 0 correspond à la lettre A donc le décodage de la lettre F donne la lettre A.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=7a_n+5$ et $b_{n+1}=15b_n+3$. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n=\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^n-\frac{5}{6}$.

Soit P_n la propriété :

$$P_n \;:\; a_n=\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^n-\frac{5}{6}$$

- **Initialisation** : Pour $n=0$,

$$\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^0-\frac{5}{6}=a_0+\frac{5}{6}-\frac{5}{6}=a_0$$

donc P_0 est vérifiée.

- **Hérédité** : On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$; c'est-à-dire

$$a_p=\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^p-\frac{5}{6}$$

Alors

$$\begin{aligned}
a_{p+1}&=7a_p+5\\
&=7\left(\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^p-\frac{5}{6}\right)+5\\
&=\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^{p+1}-7\times\frac{5}{6}+5\\
&=\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^{p+1}-\frac{35}{6}+\frac{30}{6}
\end{aligned}$$

$$a_{p+1}=\left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times 7^{p+1}-\frac{5}{6}$$

Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Partie C

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n, $b_n=\left(b_0+\frac{3}{14}\right)\times 15^n-\frac{3}{14}$

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6. Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.

On va utiliser les résultats de la partie **B.**

On doit appliquer 6 fois la fonction $x \longmapsto 15x+3$ successivement au nombre 16 (correspondant à Q), puis à son image, puis à l'image de l'image, etc.

On cherche donc, avec les notations de la partie **B**, le nombre b_6 sachant que $b_0=16$.

$$b_6=\left(16+\frac{3}{14}\right)\times 15^6-\frac{3}{14}=184\,690\,848$$

Le reste de la division de 184 690 848 par 26 est 4 qui correspond à E.