Math93.com

Baccalauréat 2016 - S Pondichéry

Série S Obli. et Spé.
22 Avril 2016
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ.

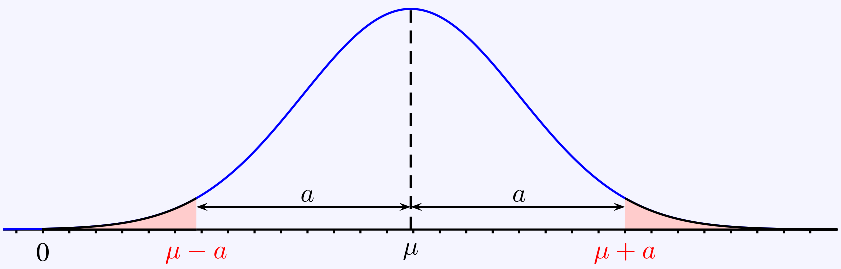
1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$. En exploitant cette information :

1. a. hachurer sur le graphique donné un annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à $0,023$;

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.
Alors par symétrie on a

$$P(X \geq \mu + a) = P(X \leq \mu - a)$$



Or ici :

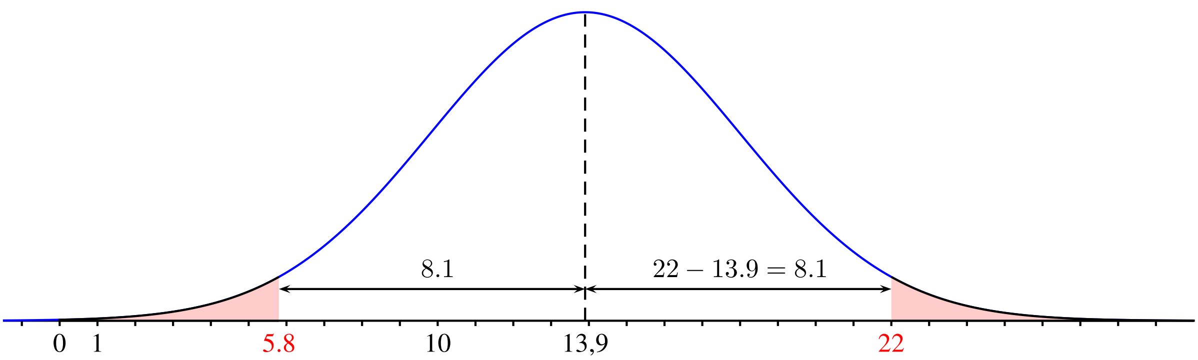
$$a = 22 - 13,9 = 8,1$$

Donc d'après la propriété 1 on a :

$$p(T \geqslant 22) = p(T \geqslant \mu + 8,1) = p(T \leq \mu - 8,1) = p(T \leq 5,8)$$

Soit

$$\boxed{p(T \geqslant 22) = 0,023 = p(T \leq 5,8)}$$



1. b. déterminer $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est $4,1$.

- On vient de montrer que
$$p(T \geqslant 22) = 0,023 = p(T \leq 5,8)$$
et d'après les propriétés de la fonction densité on a :
$$1 = p(T < 5,8) + P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) + p(T > 22)$$
Soit
$$\begin{aligned} P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) &= 1 - p(T < 5,8) - p(T > 22) \\ &= 1 - 2 \times 0,023 \\ \underline{P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)} &= \underline{0,954} \end{aligned}$$

- <u>Calculons σ</u>.
On va appliquer la propriété des intervalles dite :

Propriété 2 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

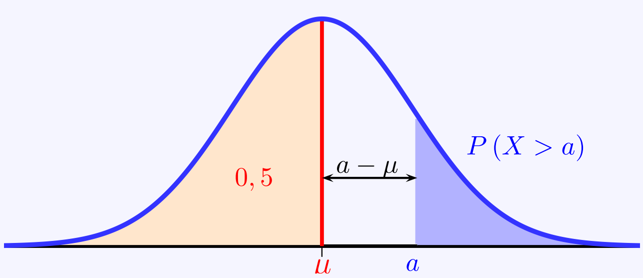
Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors :
$$\begin{aligned} P\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) &\approx 0,683 \quad : (1) \\ P\left(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\right) &\approx 0,954 \quad : (2) \\ P\left(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\right) &\approx 0,997 \quad : (3) \end{aligned}$$

On a donc ici d'après la relation (2) de la propriété 2 :
$$P\left(13,9 - 2\sigma \leq T \leq 13,9 + 2\sigma\right) \approx 0,954$$
Or d'après la question **(A.1.b.)**
$$P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = 0,954$$
Donc par identification :
$$\left|\begin{array}{l} P\left(13,9 - 2\sigma \leq T \leq 13,9 + 2\sigma\right) \approx 0,954 \\ P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = 0,954 \end{array}\right\} \underset{\text{par identification}}{\Longrightarrow} \quad 13,9 - 2\sigma \approx 5,8$$
Soit arrondi au dixième
$$\boxed{\sigma \approx \frac{5,8 - 13,9}{-2} \approx 4,1}$$

2. On choisit un jeune en France. Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine. Arrondir au centième.

Propriété 3 $\left(P\left(X > a\right)\ ;\ a > \mu\right)$

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors on a :
$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$
De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:
$$\boxed{P\left(X > a\right) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



Donc en considérant que T suit la loi normale $\mathcal{N}\left(13,9\ ;\ 4,1^2\right)$ on a :
$$p(T > 18) = 0,5 - p(13,9 < T < 18) \approx \underline{0,16}$$
Remarque : Sur la TI Voyage 200
$$0,5 - \text{TIStat.normFDR}(13.9, 18, 13.9, 4.1) \approx 0{,}158\,7$$

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.
La Hadopi souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage. Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole $(\mathcal{P})$ *suivant :*

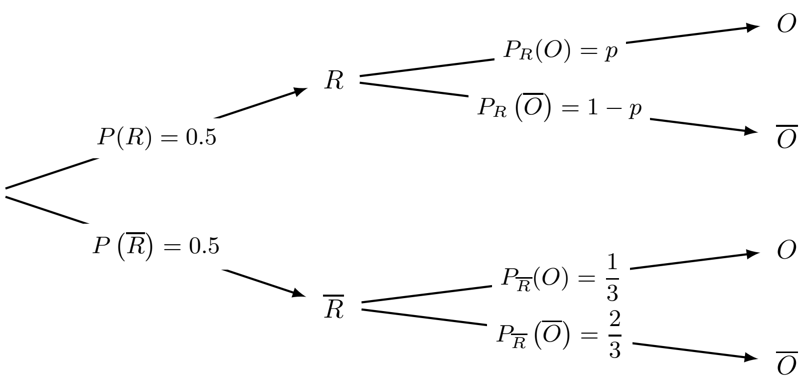
> *On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans. Pour chaque jeune de cet échantillon* :
>
> - *le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;*
> - *l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? »* ;
>
> ■ *si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère* ;
> ■ *si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui »* ;
> ■ *si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».*

On note p *la proportion de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal.*

1. *Calculs de probabilités*

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole $(\mathcal{P})$**. On note :** R **l'évènement « le résultat du lancer est pair »,** O **l'évènement « le jeune a répondu Oui ». Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :**

- Le dé étant équilibré à 6 faces, que l'on supposent numérotées de 1 à 6 même si ce n'est pas précisé (le dé aurait pu avoir que des faces avec le chiffre 1 par exemple), on a $p(R) = 0,5$.
- Si le résultat est pair, le jeune répond alors sincèrement et donc $p_R(O) = p$.
- Si le résultat est impair, il ne répond *Oui* que si le résultat est 1, donc en supposant toujours que les 6 faces sont numérotées de 1 à 6, on a $p_{\overline{R}}(O) = \dfrac{1}{3}$.



En déduire que la probabilité q **de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :** $q = \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6}$**.**

On cherche $P(O) = q$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(O) = P(O \cap R) + P\left(O \cap \overline{R}\right)$$
$$P(O) = P(R) \times P_R(O) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(O)$$
$$P(O) = 0,5 \times P + 0,5 \times \frac{1}{3}$$

$$\boxed{P(O) = q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}}$$

 ©ISSN 2272-5318

2. *Intervalle de confiance*

2. a. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole $(\mathcal{P})$. Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ». Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes âgés de 16 à 24 ans.

- **1. Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 1500$ *jeunes interrogés. Il est constaté que* 625 *répondent « Oui »* . ». Donc la fréquence observée de jeunes interrogésqui répondent « Oui » est

$$f = 625 \div 1500 \approx 0{,}416666666 \text{ soit } \boxed{f \approx 0{,}417}$$

- **2. Intervalle de confiance** :

Théorème 1 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p.

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} ✓ & n \geq 30 \\ ✓ & nf \geq 5 \\ ✓ & n(1-f) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 1\,500$, $f \approx 0{,}417$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} ✓ & n = 1500 \geq 30 \\ ✓ & nf = 1500 \times \dfrac{625}{1500} = 625 \geq 5 \\ ✓ & n(1-f) = 1500 \times \dfrac{875}{1500} = 875 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{625}{1500} - \frac{1}{\sqrt{1500}} \ ; \ \frac{625}{1500} + \frac{1}{\sqrt{1500}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $\dfrac{625}{1500} - \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \approx 0{,}39085$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}39}$.
- $\dfrac{625}{1500} + \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \approx 0{,}44249$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}443}$.

$$\boxed{I_{1500} \approx [0{,}39 \ ; \ 0{,}443]}$$

2. b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

On vient de montrer qu'un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes âgés de 16 à 24 ans est : $I_{1500} \approx [0,39 \ ; \ 0,443]$. De ce fait, puisque d'après la question **(B.1.)** : $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$, on a :

$$\begin{aligned} 0,39 \leq q \leq 0,443 &\Longleftrightarrow 0,39 \leq \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leq 0,443 \\ &\Longleftrightarrow \frac{6 \times 0,39 - 1}{3} \leq p \leq \frac{6 \times 0,443 - 1}{3} \end{aligned}$$

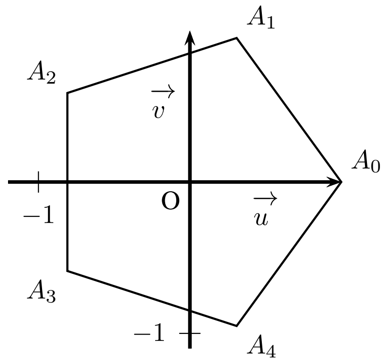
En arrondissant au millième on obtient :

$$\boxed{0,447 \leq p \leq 0,553}$$

Par conséquent <u>entre 44,7% et 55,3%</u> des jeunes pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

Exercice 2. Complexes — 3 points

Commun à tous les candidats



Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$. On rappelle que :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ on a : $\left(\overrightarrow{OA_k}\ ;\ \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$.

1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{\mathrm{i}}{2}$. Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K. Calculer BJ, puis en déduire BK.

- Calcul de BJ.
  On a $B(-1)$ et $J\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$ donc :

$$BJ = \left|\frac{\mathrm{i}}{2} + 1\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Longrightarrow \boxed{BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

- Calcul de BK.
  Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K donc $JK = \dfrac{1}{2}$ et puisque le point K appartient au segment $[BJ]$:

$$\boxed{BK = BJ - JK = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

2. 2. a. Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

- Le point A_2 d'affixe a_2 appartient au cercle trigonométrique donc $|a_2| = 1$.
- En outre on a :

$$\arg a_2 = \left(\overrightarrow{OA_0}\ ;\ \overrightarrow{OA_2}\right) = 2 \times \frac{2\pi}{5}$$

De ce fait l'affixe du point A_2 est

$$\boxed{a_2 = \mathrm{e}^{\frac{4\,\mathrm{i}\,\pi}{5}}}$$

2. b. Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

$$\begin{aligned}
BA_2^2 &= |a_2 + 1|^2 \\
&= \left|\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right|^2 \\
&= \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2 \\
BA_2^2 &= 1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \underbrace{\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)}_{1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$$

2. c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right) \text{ et } \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

D'après la question (2.b.) et en utilisant le fait que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$ on a alors :

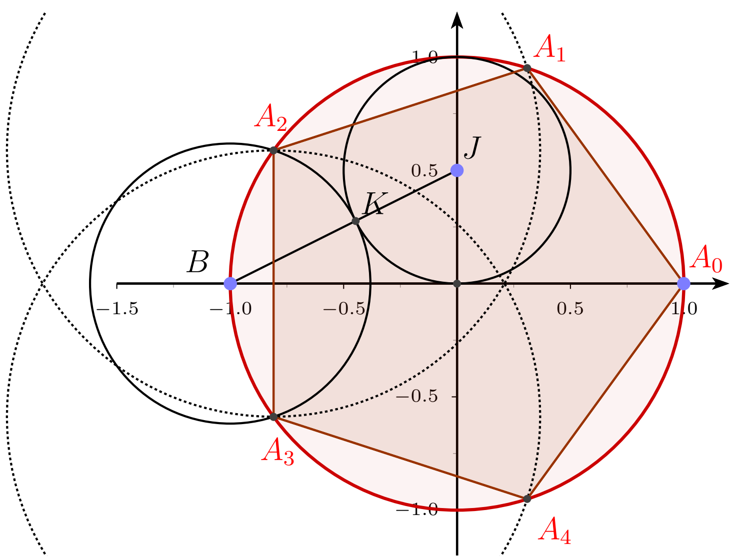
$$\begin{aligned} BA_2 &= \sqrt{2+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)} \\ &= \sqrt{2+2\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)} \\ &= \sqrt{2+\frac{-\sqrt{5}-1}{2}} \\ BA_2 &= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

Or le logiciel nous donne aussi $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ donc

$$\boxed{BA_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)=BK}$$

3. Dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

- On place les points $B(-1)$ et $J\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$.
- On trace le cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.
- On trace le cercle de centre O et de rayon 1
- On utilise alors le fait que $BA_2 = BK$. On reporte à partir de B la distance BK sur ce cercle, ce qui permet de trouver les points A_2 et A_3.
- On possède maintenant deux points consécutifs de ce pentagone régulier, ce qui permet de placer les autres points en reportant la distance les séparant sur le cercle trigonométrique.



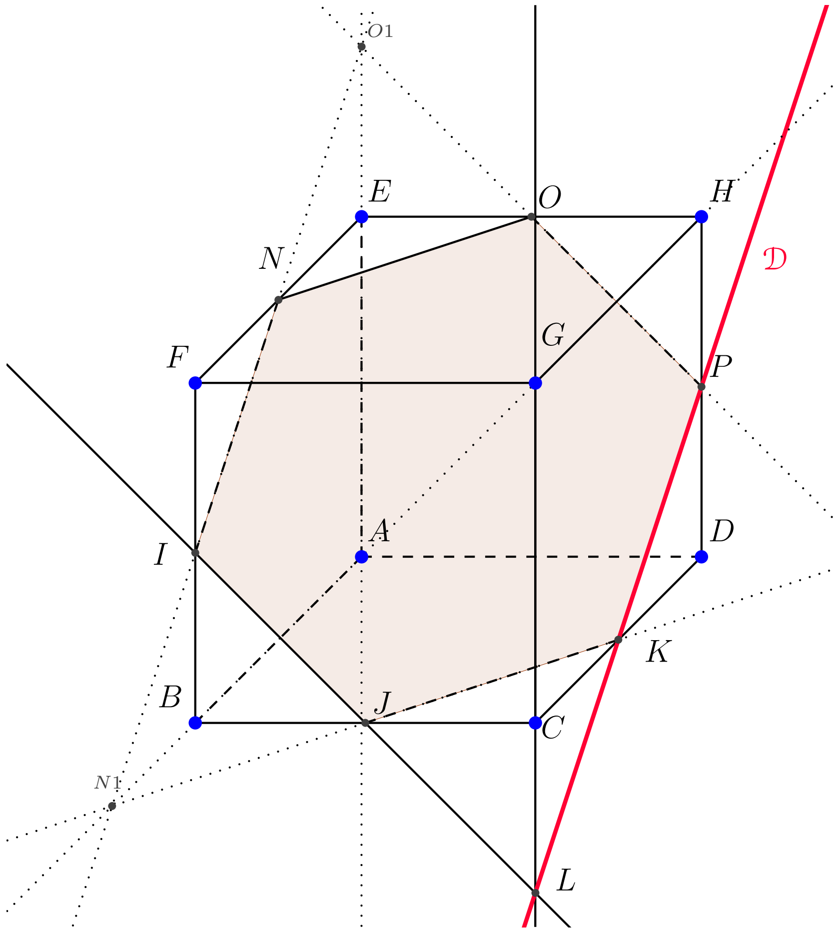
Exercice 3. Obligatoire : Espace 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
ABCDEFGH désigne un cube de côté 1. Le point I est le milieu du segment [BF]. Le point J est le milieu du segment [BC]. Le point K est le milieu du segment [CD].

Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L. Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction : le point L ; l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ; la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

Dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$ on a :

$$\boxed{A\,(0\,;\,0\,;\,0)\ ;\ G\,(1\,;\,1\,;\,1)\ ;\ I\,(1\,;\,0\,;\,0,5)\ ;\ J\,(1\,;\,0,5\,;\,0)\ ;\ K\,(0,5\,;\,1\,;\,0)}$$

2. 2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (IJK).

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(0\,;\,0\,;\,0) \\ G\,(1\,;\,1\,;\,1)\end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} I\,(1\,;\,0\,;\,0,5) \\ J\,(1\,;\,0,5\,;\,0)\end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0,5\\-0,5\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} I\,(1\,;\,0\,;\,0,5) \\ K\,(0,5\,;\,1\,;\,0)\end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-0,5\\1\\-0,5\end{pmatrix}$$

On a alors :

- $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} . \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0,5\\-0,5\end{pmatrix} = 1+0,5-0,5=0$ donc les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} . \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-0,5\\1\\-0,5\end{pmatrix} = -0,5+1-0,5=0$ donc les deux vecteurs sont orthogonaux.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (IJK).

2. b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

Propriété 4

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{u} = 0$. Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \iff a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 4, le plan (IJK) passant par le point $I\,(1\,;\,0\,;\,0,5)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est tel que :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(IJK) \iff \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-0,5\end{pmatrix} . \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(IJK) \iff (x-1)+y+(z-0,5)=0$$

$$\boxed{(IJK)\ :\ x+y+z-1,5=0}$$

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AG}}$.

3. a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

Puisque

$$\overrightarrow{\text{AM}} = t\overrightarrow{\text{AG}} \text{ avec : } A\,(0\,;\,0\,;\,0) \text{ et } \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On a :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix} \text{ et } M\,(t\,;\,t\,;\,t)$$

De ce fait :

$$\left\{\begin{array}{l} M\,(t\,;\,t\,;\,t)\\ I\,(1\,;\,0\,;\,0,5)\end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}t-1\\t\\t-0,5\end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{aligned} MI^2 &= (t-1)^2+t^2+(t-0,5)^2 && (1)\\ &= t^2-2t+1+t^2+t^2-t+\frac{1}{4} && (2)\end{aligned}$$

$$\boxed{MI^2 = 3t^2-3t+\frac{5}{4}}$$

©ISSN 2272-5318

3. b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $M\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

- Pour t réel, la fonction
$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 3t^2-3t+\frac{5}{4} \end{array}\right.$$
est une fonction polynôme du second degré en la variable t, de la forme at^2+bt+c. Le coefficient $a=3$ du terme en t^2 étant positif, la fonction est décroissante puis croissante et admet donc un minimum en $\alpha=-\frac{b}{2a}$.
- En outre $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}\in[0\,;\,1]$ donc pour $t\in[0\,;\,1]$, la fonction
$$\left\{\begin{array}{rcl} [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & MI^2=3t^2-3t+\frac{5}{4} \end{array}\right.$$
admet un minimum en $\frac{1}{2}$. De ce fait, la carré MI^2 est minimal pour $M\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$
- Pour conclure, puisque MI est positif (c'est une longueur), la distance MI est aussi minimale pour le point $\boxed{M\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)}$.

4. Démontrer que pour ce point $M\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$:

4. a. M appartient au plan (IJK).
On a vu lors de la question **(B.2.b)** que le plan (IJK) était d'équation
$$(IJK)\quad:\quad x+y+z-1,5=0$$
Donc pour savoir si le point $M\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ appartient à ce plan, il suffit de vérifier que ses coordonnées vérifient bien l'équation du plan. Pour $x=y=z=\frac{1}{2}$ on a :
$$x+y+z-1,5=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1,5=0$$
Cela permet donc d'affirmer que M appartient au plan (IJK).

4. b. La droite (IM) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).
On va classiquement utiliser les produits scalaires pour prouver l'orthogonalité des droites puis prouver que (IM) est sécante aux deux droites pour obtenir la perpendicularité qui est une condition plus forte (elle implique que les droites sont aussi sécante).

- Pour (IM) et (AG).
$$\left\{\begin{array}{l} M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \\ I\,(1\,;0\,;0,5) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\0\end{pmatrix} \quad\text{donc}\quad \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\0\end{pmatrix}.\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0,5-0,5+0=0$$
Les vecteur $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont donc orthogonaux et les droites (MI) et (AG) sont alors aussi orthogonales.
Par ailleurs, on sait que le point M appartient au segment $[AG]$, les droites (MI) et (AG) sont donc sécantes et orthogonales, soit perpendiculaires.
- Pour (IM) et (BF).
$$\left\{\begin{array}{l} B\,(1\,;0\,;0) \\ F\,(1\,;0\,;1) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad\text{donc}\quad \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\0\end{pmatrix}.\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0+0+0=0$$
Les vecteur $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont donc orthogonaux et les droites (MI) et (BF) sont alors aussi orthogonales.
Par ailleurs, on sait que le point I est le milieu segment $[BF]$, les droites (MI) et (BF) sont donc sécantes et orthogonales, soit perpendiculaires.

Exercice 3. Spécialité — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers. Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note $\det(M)$. Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. On suppose ici que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$. Justifier que N est l'inverse de M.

On a ici :

$$N \times M = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3a-5b}\begin{pmatrix} 3a-5b & 3b-3b \\ -5a+5a & 3a-5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Puisque $N \times M = Id$, cela implique aussi d'après le cours que $M \times N = Id$, de ce fait la matrice $\underline{N \text{ est l'inverse de } M}$.

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$. On souhaite déterminer tous les couples $(a\ ;\ b)$ solutions de (E).

2. a. Vérifier que le couple $(6\ ;\ 3)$ est une solution de (E).

Pour $a = 6$ et $b = 3$ on a :

$$\det M = 3a - 5b = 3 \times 6 - 5 \times 3 = 3$$

Donc le couple $\underline{(6\ ;\ 3) \text{ est une solution de } (E)}$.

2. b. Montrer que le couple d'entiers $(a\ ;\ b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

- Supposons que $(a\ ;\ b)$ est solution de (E), alors :

$$3a - 5b = 3 \iff 3a - 3 = 5b \iff 3a - 15 - 3 = 5b - 15 \iff 3(a-6) = 5(b-3)$$

- Réciproquement, supposons que : $3(a-6) = 5(b-3)$ alors :

$$3(a-6) = 5(b-3) \iff 3a - 5b = -15 + 18 = 3$$

Et donc $(a\ ;\ b)$ est solution de (E).

- Pour la résolution générale on va appliquer le théorème de Gauss.

Théorème 2 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)

Soit a, b, c des entiers.

Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c.

Remarque : Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss énonce et prouve ce théorème (sous forme de lemme en fait) en 1801 dans son ouvrage « *Disquisitiones arithmeticae* ».

- On vient de montrer que :

$$(a\ ;\ b) \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } 3(a-6) = 5(b-3)$$

- D'après l'égalité ci-dessus, 3 divise $5(b-3)$ en étant premier avec 5, donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $(b-3)$ et il existe un entier relatif k tel que :

$$(b-3) = 3k \iff b = 3 + 3k$$

- Toujours d'après cette égalité, 5 divise $3(a-6)$ en étant premier avec 3, donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(a-6)$ et il existe un entier relatif k' tel que :

$$(a-6) = 5k' \iff a = 6 + 5k'$$

- En remplaçant dans l'égalité on obtient alors

$$3 \times 5k' = 5 \times 3k \iff k' = k$$

- Les solutions de l'équation (E) sont donc les couples

$$\boxed{(6+5k\ ;\ 3+3k)\,, k \in \mathbb{Z}}$$

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.

La matrice Q est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ avec $a = 6$ et $b = 3$ donc d'après la question (A.1), son inverse est :

$$N = Q^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}}$$

2. <u>Codage avec la matrice Q</u> .

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Coder le mot DO.

- **Étape 1 :** On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$.
- **Étape 2 :** La matrice X est transformée en la matrice $Y = QX = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix}$.
- **Étape 3 :** La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$. Or :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 60 \equiv 8 & [26] \\ 57 \equiv 5 & [26] \end{array} \right. \Bigg| \Longrightarrow R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- **Étape 4 :** À la matrice $R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres qui est alors IF.
- **Bilan** : Le mot <u>DO se code en IF</u> suivant les étapes :

$$\boxed{DO \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} \longrightarrow Y = QX = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix} \longrightarrow R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow IF}$$

3. <u>Procédure de décodage</u>

3. a. Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\left\{ \begin{array}{lcll} 3x_1 & = & 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 & = & -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{array} \right.$

- On a par construction $Y = QX$, or la matrice Q est inversible donc en multipliant à gauche cette égalité par la matrice inverse de Q on obtient :

$$Y = QX \iff Q^{-1}Y = \underbrace{Q^{-1}Q}_{Id} X \iff Q^{-1}Y = X$$

  Il suffit alors de multiplier cette égalité par 3 pour obtenir celle cherchée :

$$\boxed{3X = 3Q^{-1}Y}$$

- On a :

$$3Q^{-1}Y = 3 \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 - 3y_2 \\ -5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$$

  On a alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 & = & 3y_1 - 3y_2 \\ 3x_2 & = & -5y_1 + 6y_2 \end{array} \right. \underset{\text{en passant au modulo}}{\Longrightarrow} \boxed{\left\{ \begin{array}{lcll} 3x_1 & = & 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 & = & -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{array} \right.}$$

3. b. En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\begin{cases} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}$

On a :

$$9 \times 3 = 27 = 1 + 26 \Longrightarrow 9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$$

On va alors multiplier les égalités précédentes par 9

$$\begin{cases} 3x_1 & = & 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 & = & -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{cases} \underset{\text{en multipliant par 9}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 9 \times 3x_1 & = & 9 \times 3r_1 - 9 \times 3r_2 & [26] \\ 9 \times 3x_2 & = & 9 \times (-5)r_1 + 9 \times 6r_2 & [26] \end{cases}$$

Or

$$\begin{cases} 9 \times 3 \equiv 1 \quad [26] \\ 9 \times (-5) \equiv 7 \quad [26] \\ 9 \times 6 \equiv 2 \quad [26] \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \underbrace{9 \times 3}_{1[26]} x_1 & = & \underbrace{9 \times 3}_{1[26]} r_1 - \underbrace{9 \times 3}_{1[26]} r_2 & [26] \\ \underbrace{9 \times 3}_{1[26]} x_2 & = & \underbrace{9 \times (-5)}_{7[26]} r_1 + \underbrace{9 \times 6}_{2[26]} r_2 & [26] \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}}$$

3. c. Décoder le mot SG.

- SG se code en $R = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Puis

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & \equiv & 18 - 6 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7 \times 18 + 2 \times 6 & [26] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & \equiv & 12 & [26] \\ x_2 & \equiv & 138 & [26] \end{cases}$$

- On obtient alors

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & 12 & [26] \\ x_2 & \equiv & 8 & [26] \end{cases} \longrightarrow MI$$

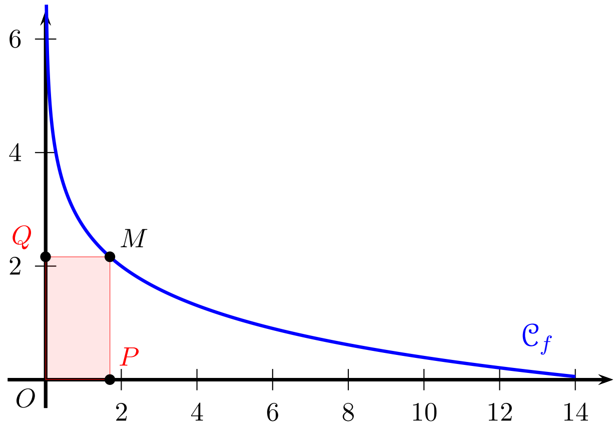
- On a donc décodé le mot SG suivant les étapes

$$\boxed{SG \longrightarrow R = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow MI}$$

Exercice 4. Recherche (fonction, aire) — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur]0 ; 14] par : $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ .. La courbe représentative f C de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M de $\mathcal{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et Q sur l'axe des ordonnées.

- **L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{C}_f$?**
  Notons tout de suite que le repère est seulement orthogonal, les unités en abscisse et en ordonnée sont différentes, nous les noterons respectivement u_1 et u_2 et donc l'unité d'aire est $u_a = u_1 \times u_2$.
  Si le point M est de coordonnées $(x\,;\,f(x))$, l'aire du rectangle $OPMQ$ est, exprimée en unités d'aire dans le repère orthonormé :
  $$\mathcal{A}(x) = OP \times OQ$$
  $$\mathcal{A}(x) = (x \times u_1) \times (f(x) \times u_2)$$
  $$\mathcal{A}(x) = x \times \left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) \times u_a$$
  $$\boxed{\mathcal{A}(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$
  L'aire n'est donc clairement pas constante, par exemple (en unités d'aire u_a) :
  $$\mathcal{A}(2) = 4 \text{ et } \mathcal{A}(1) = \ln 2 + 2$$
- **L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ? Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.**
  - Calcul de la dérivée.
    $$\mathcal{A} : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;\,14] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{A}(x) = 2x + x \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) \end{array} \right.$$
    La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[0\,;\,14]$ comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.
    La fonction $\mathcal{A}$ est de la forme $w - uv$ donc de dérivée $w' - u'v - uv'$ avec :
    $$\forall x \in [0\,;\,14]\ ;\ \mathcal{A}(x) = w(x) - u(x) \times v(x) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = x & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) & ; & v'(x) = \frac{1}{x} \\ w(x) = 2x & ; & w'(x) = 2 \end{array} \right.$$
    On a donc :
    $$\forall x \in [0\,;\,14]\,,\ \mathcal{A}'(x) = w'(x) - u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)$$
    $$\mathcal{A}'(x) = 2 - 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x \times \frac{1}{x}$$
    $$\mathcal{A}'(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$
    Soit
    $$\boxed{\forall x \in [0\,;\,14]\ ;\ \mathcal{A}'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

– Signe de la dérivée.

∗ On a pour tout réel $x \in [0\,;\,14]$:

$$\mathcal{A}'(x) = 0 \iff 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$
$$\mathcal{A}'(x) = 0 \iff \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

En composant par la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{A}'(x) = 0 \iff x = 2\,\mathrm{e}^{\,1} \approx 5,44 \in [0\,;\,14]$$

soit

$$\forall x \in [0\,;\,14]\ ;\ \boxed{\mathcal{A}'(x) = 0 \iff x = 2\,\mathrm{e}^{\,1}}$$

∗ En outre pour tout réel $x \in [0\,;\,14]$:

$$\mathcal{A}'(x) > 0 \iff 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$
$$\mathcal{A}'(x) > 0 \iff \ln\left(\frac{x}{2}\right) < 1$$

La fonction exp étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a par composition :

$$\mathcal{A}'(x) > 0 \iff x < 2\,\mathrm{e}^{\,1}$$

$$\forall x \in [0\,;\,14]\ ;\ \boxed{\mathcal{A}'(x) > 0 \iff x < 2\,\mathrm{e}^{\,1}}$$

En conséquence :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\mathcal{A}'(x) > 0 \iff 0 \leq x < 2\,\mathrm{e}^{\,1} \\ \mathcal{A}'(x) = 0 \iff x = 2\,\mathrm{e}^{\,1}\end{array}\right\} \implies \mathcal{A}'(x) < 0 \iff 2\,\mathrm{e}^{\,1} < x \leq 14}$$

– Variations et maximum.
La fonction $\mathcal{A}$ est donc croissante sur $\left[0\,;\,2\,\mathrm{e}^{\,1}\right]$ et décroissante sur $\left[2\,\mathrm{e}^{\,1}\,;\,14\right]$. Elle atteint bien un maximum en $x = 2\,\mathrm{e} \approx 5,44$ sur l'intervalle $[0\,;\,14]$.

x	0		$2\,\mathrm{e}^{\,1}$		14
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}$		$\nearrow$	$\mathcal{A}\left(2\,\mathrm{e}^{\,1}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\,1}$	$\searrow$	

L'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale pour $x = 2\,\mathrm{e}^{\,1}$ et ce maximum est :

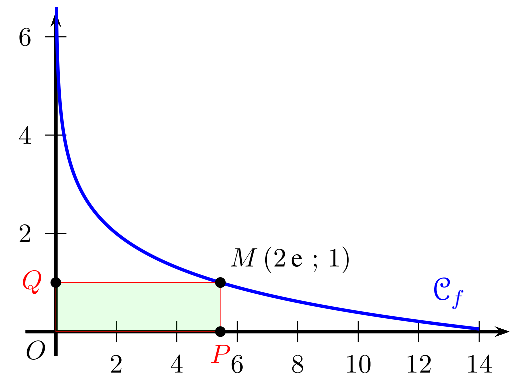
$$\mathcal{A}\left(2\,\mathrm{e}^{\,1}\right) = 2\left(2\,\mathrm{e}^{\,1}\right) - 2\,\mathrm{e}^{\,1}\ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^{\,1}}{2}\right)$$
$$\mathcal{A}\left(2\,\mathrm{e}^{\,1}\right) = 4\,\mathrm{e}^{\,1} - 2\,\mathrm{e}^{\,1}\underbrace{\ln\,\mathrm{e}^{\,1}}_{1}$$
$$\mathcal{A}\left(2\,\mathrm{e}^{\,1}\right) = 4\,\mathrm{e}^{\,1} - 2\,\mathrm{e}^{\,1}$$
$$\boxed{\mathcal{A}\left(2\,\mathrm{e}^{\,1}\right) = 2\,\mathrm{e} \approx 5,44\ u_a}$$

– Position du point M.

$$f\left(2\,\mathrm{e}^{\,1}\right) = 2 - \ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}}{2}\right) = 2 - \ln\,\mathrm{e} = 1$$

Les coordonnées du point M correspondant à cette aire maximale sont donc :

$$\boxed{M\,(2\,\mathrm{e}\,;\,1)}$$



©ISSN 2272-5318

Exercice 5. 5 points

Commun à tous les candidats

On souhaite stériliser une boîte de conserve. Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$ °C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$ °C. La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$. Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.

Notons tout d'abord que d'après l'algorithme proposé, la suite (T_n) est définie par la relation de récurrence :

$$\boxed{(T_n)\ :\ \begin{cases} T_0 &= 25 \\ T_{n+1} &= 0,85 \times T_n + 15 \end{cases} \quad , n \in \mathbb{N}}$$

La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est donnée par T_3. On a

$$\begin{aligned} T_0 &= 25 \\ T_1 &= 0,85 \times 25 + 15 = 36,3 \\ T_2 &= 0,85 \times T_1 + 15 = 45{,}812\,5 \\ T_3 &= 0,85 \times T_2 + 15 = 53{,}940\,625 \end{aligned}$$

Donc arrondie à l'unité, la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes sera d'environ <u>54 degré Celsius</u>.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat $(\mathcal{P}_0)$ est vrai puisque :

  $$100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 = 25 = T_0$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $(\mathcal{P}_n)$ soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  - On a par définition de la suite :
    $$T_{n+1} = 0,85 \times T_n + 15$$
  - On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : $(\mathcal{P}_n)$ soit vérifié et donc que
    $$T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$$
  - On a donc :
    $$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0,85 \times T_n + 15 \\ T_{n+1} &= 0,85 \times (100 - 75 \times 0,85^n) + 15 \\ T_{n+1} &= 85 - 75 \times 0,85^{n+1} + 15 \\ T_{n+1} &= \underline{100 - 75 \times 0,85^{n+1}} \end{aligned}$$

  - On a alors montré que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat $(\mathcal{P}_n)$ vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{T_n = 100 - 75 \times 0,85^n}$$

3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C. On va donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $T_n > 85$. Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} T_n > 85 &\iff 100 - 75 \times 0,85^n > 85 \\ &\iff -75 \times 0,85^n > -15 \\ &\iff 0,85^n < \frac{15}{75} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$T_n > 85 \iff \ln 0,85^n > \ln \frac{1}{5} = -\ln 5$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$T_n > 85 \iff n \ln 0,85 > -\ln 5$$

En divisant chaque membre par $\ln 0,85 < 0$, l'ordre change et :

$$T_n > 85 \iff n > \frac{-\ln 5}{\ln 0,85} \approx 9,9$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 10. La stérilisation débute donc au bout de 10 minutes.

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif. On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

1.

1. a. Étudier le sens de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

- Calcul de la fonction dérivée.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme $k' + k\,\mathrm{e}^{\,u}$ donc de dérivée $ku'\,\mathrm{e}^{\,u}$ avec pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$u(t) = -\frac{\ln 5}{10}t\ ;\ u'(t) = -\frac{\ln 5}{10}$$

On a donc pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -75 \times u'(t) \times \mathrm{e}^{\,u(t)} \\ f'(t) &= -75 \times \left(-\frac{\ln 5}{10}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+\ ;\ f'(t) = (7,5 \ln 5)\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}}$$

- <u>Étude des variations</u>.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc à fortiori sur $\mathbb{R}_+$. La fonction dérivée f' est alors du signe du facteur constant $(7,5\ln 5)$ qui est positif car $5 > 1$, on a $(7,5\ln 5) \approx 12,1 > 0$.
  La dérivée f' est donc strictement positive et <u>f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$</u>.

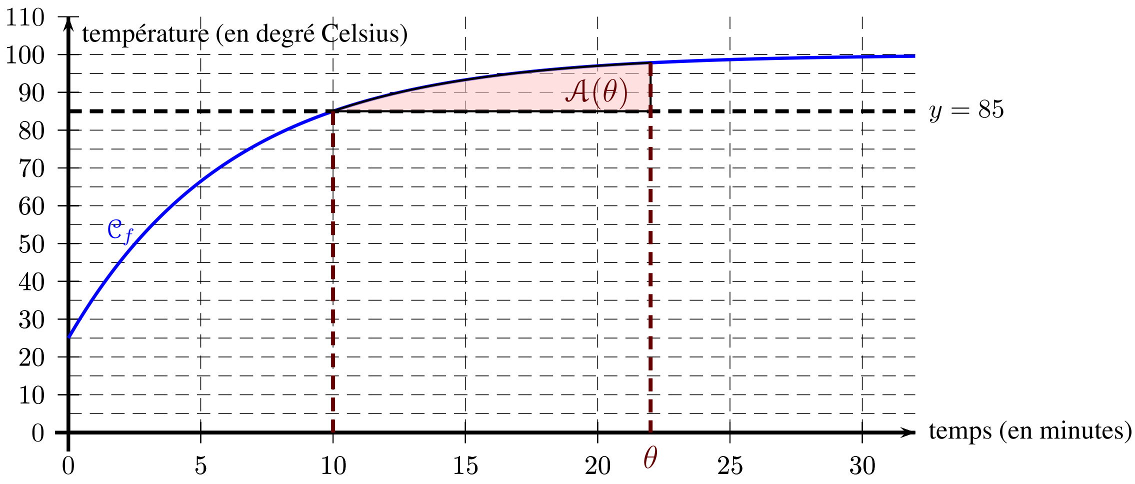
1. b. Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.

On vient de montrer lors de la question **(B.1.a)** que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Le fait de composer par f dans une inégalité ne change donc pas le sens de cette dernière, de ce fait :

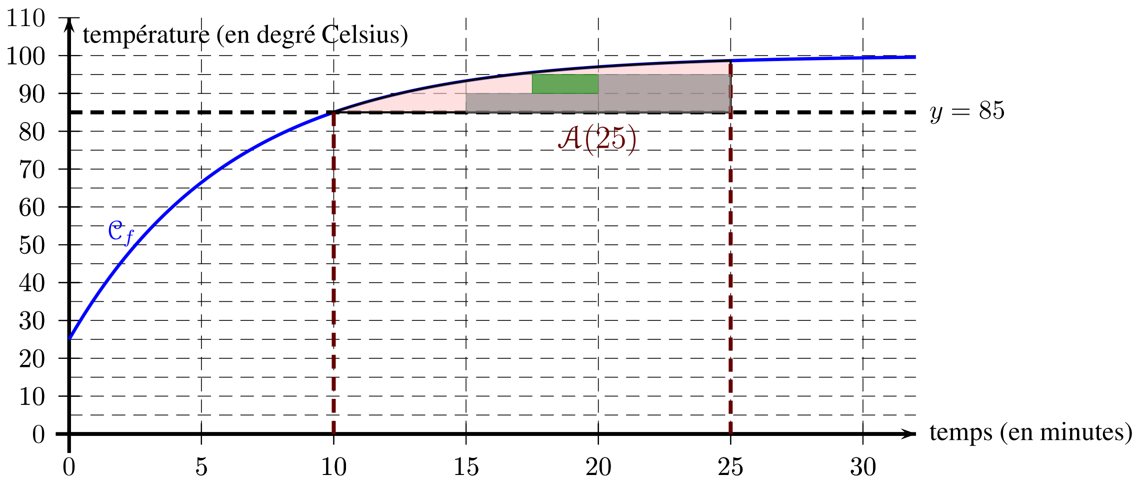
$$t \geqslant 10 \Longrightarrow f(t) \geqslant f(0) = 85$$

Donc on a montré que si <u>$t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$</u>.

2. *Soit θ un réel supérieur ou égal à 10. On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10,\ t = \theta,\ y = 85$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f. On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80.*



2. a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe , que l'on a $\mathcal{A}(25) > 80$.



Sur le graphique, l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ est clairement supérieur à l'aire de trois rectangles (en gris) de côtés $5 \times 5 = 25\ u.a.$ donc à $75\ u.a.$
La partie restante est aussi supérieur à l'aire d'un demi rectangle (en vert) d'aire $12,5\ u.a.$
On a donc justifié, à l'aide du graphique , que l'on a <u>$\mathcal{A}(25) > 80$</u>.

2. b. Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \displaystyle\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.

Pour $\theta \geqslant 10$, l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ est égale l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $t = 10,\ t = \theta,$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f et l'axe des abscisses moins l'aire du rectangle délimité par les droites d'équation $t = 10,\ t = \theta,$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = 85$.

©ISSN 2272-5318

On a donc pour $\theta \geqslant 10$:

$$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\,\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} \left(100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} - 85\right)\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale on a alors :

$$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} 15\,\mathrm{d}t - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$$

Soit

$$\boxed{\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t}$$

2. c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80. On doit donc vérifier si $\mathcal{A}(20) > 80$.
On a facilement :

$$\begin{aligned}\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\mathrm{d}t &= -\frac{10}{\ln 5}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{\theta} \\ &= -\frac{10}{\ln 5}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\theta} - \frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

De ce fait en utilisant le résultat de la question précédente, pour $\theta \geqslant 10$:

$$\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \times \left(-\frac{10}{\ln 5}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\theta} - \frac{1}{5}\right)\right)$$
$$\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) + \frac{750}{\ln 5}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\theta} - \frac{1}{5}\right)$$

Et donc pour $\theta = 20$

$$\mathcal{A}(20) = 15(20 - 10) + \frac{750}{\ln 5}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}20} - \frac{1}{5}\right)$$
$$\mathcal{A}(20) = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left(\mathrm{e}^{-2\ln 5} - \frac{1}{5}\right) \approx 75,4$$

$$\boxed{\mathcal{A}(20) \approx 75,4 < 80}$$

La stérilisation n'est donc pas terminée au bout de 20 minutes.

- Fin du devoir -

©ISSN 2272-5318