

Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane

20 juin 2016

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

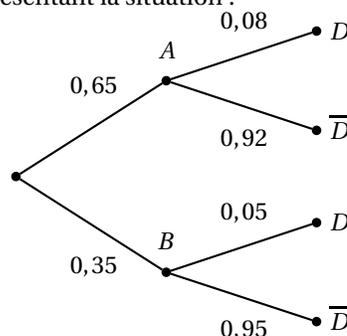
- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Arbre pondéré représentant la situation :



b. On utilise la formule des probabilités totales :

$$p(\bar{D}) = p_A(\bar{D}) \times p(A) + p_B(\bar{D}) \times p(B) = 0,92 \times 0,65 + 0,95 \times 0,35 = 0,598 + 0,3325 = \boxed{0,9305}.$$

$$c. p_{\bar{D}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \frac{0,598}{0,9305} \approx \boxed{0,64}?$$

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

Notons N le nombre d'ampoules sans défaut. On a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues ; N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,9305)$.

On sait que $p(X = k) = \binom{10}{k} 0,9305^k \times (1 - 0,9305)^{10 - k}$.

$$p(N \geq 9) = 1 - p(N \leq 8) \approx \boxed{0,85} \text{ (calculé à la calculatrice)}$$

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel

strictement positif) alors pour tout réel positif a , $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$.

a. $P(T \geq a) = 1 - P(T < a) = 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^a = 1 - (-e^{-\lambda a} - (-1)) = e^{\lambda a}$.

b. $P_{T \geq t}(T \geq t + a) = \frac{p([T \geq t] \cap (T \geq t + a))}{P(T \geq t)} = \frac{p[T \geq t + a]}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda a} = P(T \geq a)$ (loi de durée de vie sans vieillissement).

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

a. On sait que pour une loi exponentielle, l'espérance $E(T)$ est $E(T) = \frac{1}{-\lambda}$.

On a donc $\frac{1}{-\lambda} = 1000$ d'où $\lambda = 0,0001$.

b. $P(T \geq 5000) = e^{-0,0001 \times 5000} = e^{-5} \approx 0,0067$

c. $P_{(T \geq 7000)}(T \geq 12000) = P(T \geq 5000) \approx 0,0067$ (d'après 1. b).

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. On a $p = 0,06$, $n = 1000$.

- $n \geq 30$
- $np = 60 \geq 5$
- $n(1 - p) = 940 \geq 5$

Les conditions sont réunies pour qu'on puisse calculer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I_{95} = \left[p - \frac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,045 ; 0,068].$$

2. La fréquence observée d'ampoules défectueuses est $f = \frac{0,71}{1000} = 0,071$.

$f \notin I_{95}$. Au risque d'erreur de 5 %, on peut mettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 2

3 points

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note \mathcal{C} l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 2| = 1$.

1. Soit A le point d'affixe 2.

$|z - 2| = 1 \iff AM = 1$ donc \mathcal{C} est le cercle de centre A et de rayon 1.

2. $M(z) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} |z - 2| = 1 \\ y = ax \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ |x - 2 + iax| = 1 \end{cases}$

$|x - 2 + iax| = 1 \iff (x - 2)^2 + a^2 x^2 = 1 \iff (1 + a^2)x^2 - 4x + 3 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 16 - 12(1 + a^2) = 4 - 12a^2 = 4(1 - 3a^2)$.

Pour qu'il y ait une intersection, il faut que cette équation ait au moins une solution réelle, donc que $\Delta \geq 0$.

On doit avoir $1 - 3a^2 \geq 0$, donc $-\sqrt{\frac{1}{3}} \leq a \leq \sqrt{\frac{1}{3}}$.

EXERCICE 3
Commun à tous les candidats

7 points

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = xe \times e^{-x^2} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x^2}}{x^2} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} + +\infty \text{ (croissances comparées).}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^{x^2}} \right) = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{x} \right) = 0$, on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

$$f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. a. $f = ue^v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = 1 - x^2 \\ v'(x) = -2x \end{cases}$.

$f' = u'e^v + u \times v'e^v$ d'où :

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = \boxed{(1 - 2x^2)e^{1-x^2}}.$$

b. Comme $e^{1-x^2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2$.

$1 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $1 - 2x^2$ est positif (signe opposé à celui du coefficient de x^2) entre les racines.

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times e = -\frac{\sqrt{2}e}{2} \text{ et } f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}e}{2}.$$

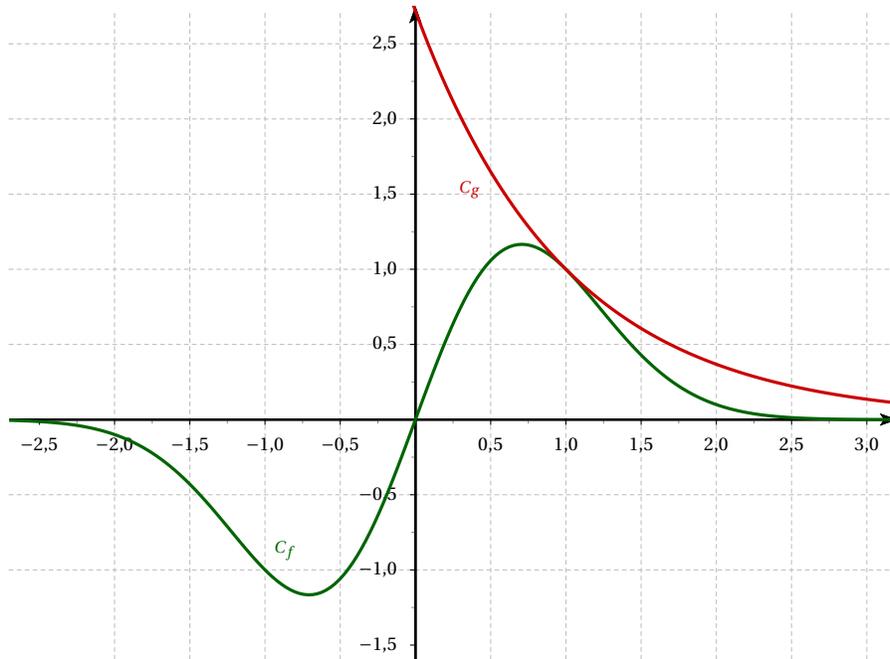
Tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	0	$-\frac{\sqrt{2}e}{2}$	$\frac{\sqrt{2}e}{2}$	0

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Il semble que \mathcal{C}_f soit en dessous de \mathcal{C}_g et que les deux courbes soient tangentes en un point.
2. Soit $x \leq 0$; $f(x) = xe^{1-x^2} \leq 0$ car $x \leq 0$ et $e^{1-x^2} > 0$ et $g(x) = e^{1-x} > 0$, donc $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a. $f(x) \leq g(x) \iff xe^{1-x^2} \leq e^{1-x} \iff xee^{-x^2} \iff ee^{-x} \iff xe^{-x^2} \leq e^{-x} \iff \ln(xe^{-x^2}) \leq \ln(e^{-x})$ (car la fonction \ln est croissante).

cela équivaut à $\ln x - x^2 \leq -x \iff \ln x - x^2 + x \leq 0 \iff \boxed{\Phi(x) \leq 0}$.

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b. $\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$ qui est du signe de $-2x^2 + x + 1$ car $x > 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 9 > 0$: il y a deux racines : $-\frac{1}{2}$ et 1.

Cette expression est négative (du signe du coefficient de x^2 , donc de -2) en dehors de l'intervalle formé par les racines.

$\Phi(1) = 0$.

x	0	1	$+\infty$
$\Phi'(x)$	+	0	-
$\Phi(x)$			

On en déduit le tableau de variation de Φ :

- c. Le maximum de $\Phi(x)$ est $\Phi(1) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) \leq 0$.
4. a. $\Phi(x) \leq 0 \iff f(x) \leq g(x)$ donc \mathcal{C}_f est bien en dessous de \mathcal{C}_g .
- b. $f(x) = g(x) \iff \Phi(x) = 0 \iff x = 1$ donc les deux courbes ont un point commun, A, de coordonnées (1 ; 1).

c. $f'(1) = -1$; $g'(x) = -e^{1-x}$ donc $g'(1) = -1$.

En A, les deux tangentes ont le même coefficient directeur, donc les deux courbes ont même tangente.

Partie C

1. On pose $u(x) = 1 - x^2$; alors $u'(x) = -2x$ donc $x = -\frac{1}{2}u'(x)$ d'où $f = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$.

Une primitive est $F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} = \boxed{-\frac{1}{2}e^{1-x^2}}$.

2. $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx = \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx$.

Une primitive de $g - f$ est $G - F$ avec

$(G - F)(x) = -e^{1-x} - \left(-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}e^{1-x^2} - e^{1-x}$.

$\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx = (G - F)(1) - (G - F)(0) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}e - e\right) = \boxed{\frac{e-1}{2}}$.

3. Ce résultat correspond à l'aire en unités d'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_g , \mathcal{C}_f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 4

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

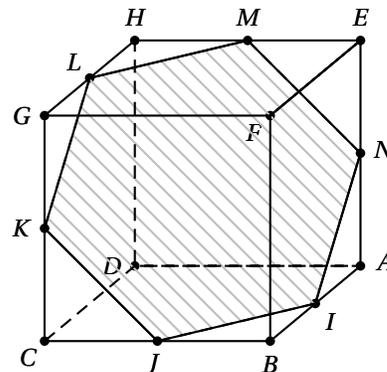
L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \vec{DC}, \vec{DA}, \vec{DH})$.

Dans ce repère, on a :

$D(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $A(0; 1; 0)$,

$H(0; 0; 1)$ et $E(0; 1; 1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit \mathcal{P} le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan \mathcal{P} représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. a. $\vec{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires.

$\vec{DF} \cdot \vec{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$; $\vec{DF} \cdot \vec{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$.

\vec{DF} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) donc c'est un vecteur normal à ce plan.

b. \mathcal{P} et (BGE) sont parallèles, donc \vec{DF} est aussi un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

Une équation cartésienne de ce plan est : $(x - x_I) + (y - y_I) + (z - z_I) =$

$$0 \iff x + y + z = \frac{3}{2}.$$

2. Le point N appartient à $[AE]$. Ses coordonnées sont donc $(0 ; 1 ; z_N)$.

Il appartient au plan \mathcal{P} donc $0 + 1 + z_N = \frac{3}{2} \iff z_N = \frac{1}{2}$.

Ainsi N est le milieu de $[AE]$.

3. a. $\vec{HB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (HB) est $\begin{cases} x = x_H - t \\ y = y_H - t \\ z = z_H + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b. $\vec{HB} \cdot \vec{DF} = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0$.

Le plan \mathcal{P} et la droite (HB) sont donc sécants.

On injecte les équations de (HB) dans l'équation de \mathcal{P} .

$$-t - t + 1 + t - \frac{3}{2} = 0 \iff -t - \frac{1}{2} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}.$$

Donc (HB) et le plan \mathcal{P} sont sécants en un point $T \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

4. BGF est rectangle en F. Son aire est $\mathcal{A}(BGF) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Le volume du tétraèdre $FBGE$ est alors $\mathcal{V}(FBGE) = \frac{\mathcal{A}(BGF) \times FE}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} =$

$$\frac{1}{6}.$$

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \tag{E}$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x ; y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Variables : X est un nombre entier
Y est un nombre entier

Début : Pour X variant de -5 à 10
(1) **Pour Y variant de -5 à 10**
(2) **Si 7X-3Y=1**
Alors Afficher X et Y
Fin Si
Fin Pour
Fin Pour
Fin

2. a. $7 \times 1 - 3 \times 2 = 7 - 6 = 1$ donc (1 ; 2) est une solution particulière de (E).
- b. Soit $(x ; y)$ un couple solution quelconque de (E).
On a alors : $7x - 3y = 7 \times 1 - 3 \times 2 \iff 7(x - 1) = 3(y - 2)$.
7 divise $7(x - 1)$ donc 7 divise $3(x - 2)$.
7 et 3 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 7 divise $y - 2$ donc $y - 2 = 7k$ d'où $y = 2 + 7k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On remplace y par $2 + 7k$: on trouve $x = 7(x - 1) = 3 \times 7k$ d'où $x - 1 = 3k$ donc $x = 1 + 3k$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{(1 + 3k ; 2 + 7k), k \in \mathbb{Z}\}$.
- c. On veut que $-5 \leq 1 + 3k \leq 10$ et $-5 \leq 2 + 7k \leq 10$ Soit $-6 \leq 3k \leq 9$ et $-7 \leq 7k \leq 8$ D'où $-2 \leq k \leq 3$ et $-1 \leq k \leq \frac{8}{7}$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la droite \mathcal{D} d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n : y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

a.
$$MX_n = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{pmatrix} = X_{n+1} \text{ donc } \boxed{X_{n+1} = MX_n}.$$

b. Pour tout n , on a : $\boxed{X_n = M^n X_0}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de

$$P, \text{ notée } P^{-1}, \text{ est définie par } P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a.
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ donc } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ qui est bien une matrice diagonale.}$$

b. Pour tout n , $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

- c. • Initialisation : Pour $n = 0$, $M^0 = I_2$ (matrice identité) et $PD^0P^{-1} = I_2$ donc c'est vrai.
- Hérédité : $M^{n+1} = M^n \times M = PD^nP^{-1} \times M = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
La propriété est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n .

3. On admet que, pour tout entier naturel n , $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

On a $X_n = M^n X_0$ donc $\begin{cases} x_n = -14 + \frac{15}{2^n} + 12 - \frac{12}{2^n} \\ y_n = -35 + \frac{35}{2^n} + 30 - \frac{25}{2^n} \end{cases}$ donc :

$$\begin{cases} x_n = -2 + \frac{36}{2^n} \\ y_n = -5 + \frac{10}{2^n} \end{cases}$$

4. Pour tout n , $7x_n - 3y_n - 1 = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} - 1 = 1 - 1 = 0$ donc A_n appartient à la droite \mathcal{D} .