

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

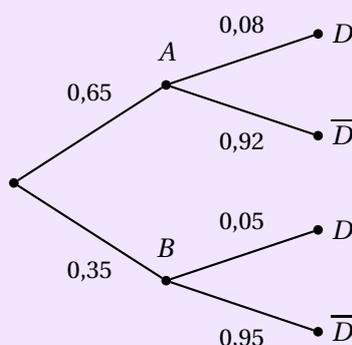
On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

Solution :



b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.

Solution : A et B forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D} \cap A) + P(\overline{D} \cap B) = P_A(\overline{D}) \times P(A) + P_B(\overline{D}) \times P(B) = 0,598 + 0,3325 = 0,9305$$

c. L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

Solution : On cherche $P_{\overline{D}}(A)$

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(\overline{D})} = \frac{0,598}{0,9305} = \frac{1178}{1861} \approx 0,6330$$

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Solution : On répète $n = 10$ fois de manière indépendante une expérience n'ayant que deux issues : l'ampoule est sans défaut ou elle présente un défaut dont la probabilité de succès est $p = P(\overline{D}) = 0,9305$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'ampoules sans défaut alors $X \mapsto \mathcal{B}(10; 0,9305)$

On cherche $P(X \geq 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - (0,9305)^{10} \approx 0,5134$

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors

pour tout réel positif a , $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$.

a. Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.

Solution :

$$P(T \geq a) = 1 - P(T \leq a) = 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^a = 1 - \left[(-e^{-\lambda a}) - (-1) \right] = 1 - \left[1 - e^{-\lambda a} \right] = e^{-\lambda a}$$

b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

Solution :

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = \frac{P((T \geq t) \cap (T \geq t + a))}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t + a)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda a} = P(T \geq a)$$

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

Solution : L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$

On a donc $\frac{1}{\lambda} = 10\,000 \iff \lambda = 10^{-4}$

b. Calculer la probabilité $P(T \geq 5\,000)$.

Solution :

$$P(T \geq 5\,000) = e^{-5\,000 \times 10^{-4}} = e^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6065$$

c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Solution : On cherche $P_{T \geq 7\,000}(T \geq 12\,000) = P_{T \geq 7\,000}(T \geq 7\,000 + 5\,000)$

D'après la question 1. b. on a donc $P_{T \geq 7\,000}(T \geq 12\,000) = P(T \geq 5\,000) \approx 0,6065$

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

Solution : La proportion $p = 0,06$ et la taille $n = 1000$ de l'échantillon vérifient :

$$n \geq 30, np = 60 \geq 5 \text{ et } n(1-p) = 940 \geq 5$$

On peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a ici $I = [0,0453 ; 0,0747]$

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Solution : Ici, la fréquence observée d'ampoules défectueuses est $f = 0,071$ et on a $f \in I$

donc on n'a pas de raison de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise

EXERCICE 2**3 points****Commun à tous les candidats**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note \mathcal{C} l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2| = 1$.

1. Justifier que \mathcal{C} est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

Solution : Soit $B(2)$ alors $|z-2| = 1 \iff BM = 1$

\mathcal{C} est donc le cercle de centre $B(2)$ et de rayon 1.

2. Soit a un nombre réel. On appelle \mathcal{D} la droite d'équation $y = ax$. Déterminer le nombre de points d'intersection entre \mathcal{C} et \mathcal{D} en fonction des valeurs du réel a .

Solution : Soit $z = x + iy$

$$\begin{cases} M(z) \in \mathcal{C} \\ M(z) \in \mathcal{D} \end{cases} \iff \begin{cases} |z-2| = 1 \\ z = x + iax \end{cases} \iff \begin{cases} |(x-2) + iax| = 1 \\ z = x + iax \end{cases}$$

$$|(x-2) + iax| = 1 \iff (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \iff x^2(1+a^2) - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12(1+a^2) = 4 - 12a^2$$

$$\Delta > 0 \iff a^2 < \frac{1}{3} \iff -\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit que :

— si $a \in]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty[$ alors \mathcal{C} et \mathcal{D} n'ont aucun point commun

— si $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou si $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ alors \mathcal{C} et \mathcal{D} ont un seul point d'intersection. les deux droites \mathcal{D} sont les tangentes à \mathcal{C} passant par O

— si $a \in]-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}[$ alors \mathcal{C} et \mathcal{D} ont deux points communs distincts

EXERCICE 3

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,

$$f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Solution :

$$\forall x \neq 0, f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty. \text{ De plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$$

$$\text{Donc par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2. a. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa dérivée.

Démontrer que pour tout réel x ,

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

Solution : $f = ue^v \implies f' = u'e^v + u(v'e^v) = (u' + uv')e^v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1 - x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -2x \end{cases}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Solution : $e^{1-x^2} > 0$ sur \mathbb{R} donc $f'(x)$ est du signe de $(1 - 2x^2) = (1 - x\sqrt{2})(1 + x\sqrt{2})$ on en déduit le tableau suivant :

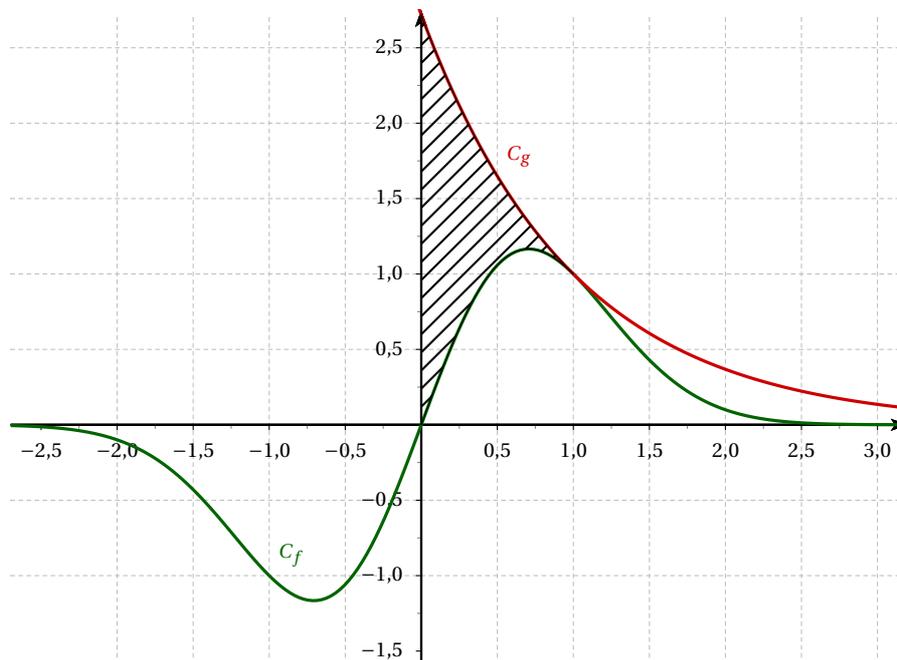
x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0		$-\frac{\sqrt{2}e}{2}$		$\frac{\sqrt{2}e}{2}$		0

On remarque que f est impaire donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

Solution : Il semblerait que C_f soit toujours en dessous de C_g

2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.

Solution : Sur \mathbb{R} , $e^{1-x} > 0$ et $e^{1-x^2} > 0$

On en déduit que sur $] -\infty ; 0]$, $f(x) \leq 0$ et $g(x) > 0$

On a donc bien $\forall x \in] -\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

- a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

Solution :

$$f(x) \leq g(x) \iff xe^{1-x^2} \leq e^{1-x}$$

si $x > 0$ alors cette inéquation est équivalente à $\ln(xe^{1-x^2}) \leq \ln(e^{1-x})$ car la fonction \ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$

$$\ln(xe^{1-x^2}) \leq \ln(e^{1-x}) \iff \ln(x) + \ln(e^{1-x^2}) \leq \ln(e^{1-x}) \iff \ln(x) + 1 - x^2 \leq 1 - x \iff \ln(x) - x^2 + x \leq 0$$

Finalement $\text{si } x > 0$, $f(x) \leq g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leq 0$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

- b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

Solution :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} = \frac{(x-1)(-2x-1)}{x} = \frac{(1-x)(2x+1)}{x}$$

or sur $]0; +\infty[, \frac{2x+1}{x} > 0$ donc $\Phi'(x)$ est du signe de $(1-x)$

on en déduit le tableau

x	0	1	$+\infty$	
$\Phi'(t)$		+	0	-
$\Phi(t)$			0	

- c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.

Solution :

Sur $]0; +\infty[, \Phi$ admet 0 pour maximum donc $\forall x \in]0; +\infty[, \Phi(x) \leq 0$

4. a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

Solution :

La conjecture est validée puisque l'on vient de montrer que $\Phi(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq g(x)$ sur $]0; +\infty[$ or on avait montré que $f(x) < g(x)$ sur $] -\infty; 0]$

Finalemnt C_f est bien toujours en dessous de C_g sur \mathbb{R}

- b. Montrer que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un unique point commun, noté A .

Solution : $f(x) = g(x) \iff \Phi(x) = 0 \iff x = 1$

$A(1; 1)$ est donc l'unique point commun de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g

- c. Montrer qu'en ce point A , ces deux courbes ont la même tangente.

Solution : g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -e^{1-x}$$

$$\text{alors } g'(1) = -1 \text{ or } f'(1) = -1$$

Donc \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g admettent la même tangente en A

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} .

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}(-2xe^{1-x^2})$

donc $f = -\frac{1}{2}(u'e^u)$ de plus f est continue sur \mathbb{R} comme composée de fonctions continues sur \mathbb{R} , elle y admet donc des primitives

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} \text{ est une primitive de } f$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$.

Solution : Comme précédemment, on montre que $G(x) = -e^{1-x}$ est un primitive de g sur \mathbb{R}

$$\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = [G(x) - F(x)]_0^1 = (G(1) - F(1)) - (G(0) - F(0)) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}e\right)$$

Finalemment, $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx = \frac{1}{2}(e - 1)$

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Solution : Il s'agit de l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan définie par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$

Cette aire est hachurée sur le graphique

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

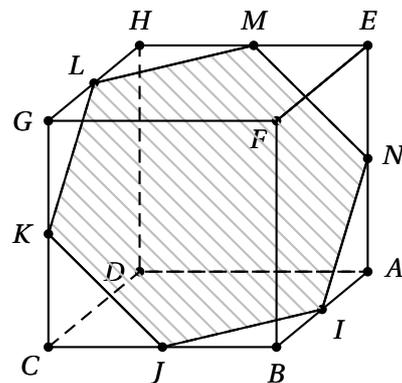
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :

$D(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $A(0; 1; 0)$,

$H(0; 0; 1)$ et $E(0; 1; 1)$.



Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit \mathcal{P} le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan \mathcal{P} représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB], [BC], [CG], [GH], [HE]$ et $[AE]$.

1. a. Montrer que le vecteur \overrightarrow{DF} est normal au plan (BGE) .

Solution : $B(1, 1, 0)$, $F(1, 1, 1)$ et $G(1, 0, 1)$

$$\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ et $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$

Donc \overrightarrow{DF} est normal au plan (BGE)

b. En déduire une équation cartésienne du plan \mathcal{P} .

Solution : \mathcal{P} est parallèle à (BGE) donc ils ont même vecteur normal \overrightarrow{DF}

on a alors $\mathcal{P} : x + y + z + d = 0$ or $I\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right) \in \mathcal{P}$ d'où $d = -\frac{3}{2}$

Finalemment $\mathcal{P} : 2x + 2y + 2z - 3 = 0$

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

Solution : \mathcal{P} est parallèle à (BGE) donc le plan (ABE) coupe ces deux plans suivant deux droites parallèles or $\mathcal{P} \cap (ABE) = (IN)$ et $(BGE) \cap (ABE) = (BE)$

On en déduit que (BE) et (IN) sont parallèles or I est le milieu de $[AB]$ donc d'après le théorème de la droite des milieux, N est le milieu de $[AE]$

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB) .

Solution : $\overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $H(0; 0; 1)$ donc $(HB) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b. En déduire que la droite (HB) et le plan \mathcal{P} sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

Solution :

Chercher les coordonnées de l'éventuel point d'intersection entre (HB) et \mathcal{P} revient à résoudre ce système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ 2x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ 2t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(HB) et \mathcal{P} sont sécants en $T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

remarque : ce point est le centre du cube

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

Solution : $FBGE$ est une pyramide de base FBG et de hauteur EF

$$\mathcal{V}_{FBGE} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FBG} \times EF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times FB \times FG \times EF = \frac{1}{6}$$

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \quad (E)$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x; y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Solution :

Variables :	X est un nombre entier Y est un nombre entier
Début :	Pour X variant de -5 à 10 Pour Y variant de -5 à 10 Si 7X-3Y=1 Alors Afficher X et Y Fin Si Fin Pour Fin Pour
Fin	

2. a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

Solution : $(x ; y) = (1 ; 2)$ est une solution particulière de l'équation (E)

- b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Solution :

$$\begin{cases} (x ; y) \text{ solution de (E)} \\ (1 ; 2) \text{ solution de (E)} \end{cases} \iff \begin{cases} 7x - 3y = 1 \\ 7 \times 1 - 3 \times 2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 7(x-1) - 3(y-2) = 0 \\ (1 ; 2) \text{ solution de (E)} \end{cases}$$

Donc $(x ; y)$ solution de (E) si et seulement si $7(x-1) = 3(y-2)$

on en déduit que 7 divise $3(y-2)$ or 7 et 3 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-2$

Alors il existe un entier relatif k tel que $y-2 = 7k$, on en déduit $7(x-1) = 21k$ soit $x-1 = 3k$

Finalement **les solutions de (E) sont les couples $(x ; y)$ de la forme $(1 + 3k ; 2 + 7k)$ ($k \in \mathbb{Z}$)**

- c. Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Solution : Pour $k < -2$ et $k > 3$ les valeurs trouvées pour x n'appartiennent pas à $[-5 ; 10]$

Pour $k < -1$ et $k > 1$ les valeurs trouvées pour y n'appartiennent pas à $[-5 ; 10]$

Finalement, il faut $k \in \{-1 ; 0 ; 1\}$ et on obtient donc trois couples solution :

$(-2 ; -5)$, $(1 ; 2)$ et $(4 ; 9)$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la droite \mathcal{D} d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n ; y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = MX_n$.

$$\text{Solution: } \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$

b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n , X_n en fonction de M^n et X_0 .

$$\text{Solution: } \forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$$

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P , notée P^{-1} , est définie par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$\text{Solution: } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale.

b. Pour tout entier naturel n , donner D^n sans justification.

$$\text{Solution: } \forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $M^n = PD^nP^{-1}$.

Solution: Soit I_2 la matrice identité d'ordre 2

$$M^n = PD^nP^{-1} \iff P^{-1}(M^n)P = P^{-1}(PD^nP^{-1})P \iff P^{-1}M^nP = I_2D^nI_2 = D^n$$

$$\text{alors } M^n = PD^nP^{-1} \iff D^n = P^{-1}M^nP$$

montrons donc que $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}M^nP$

initialisation : pour $n = 0$ $D^0 = I_2$ et $P^{-1}M^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$

hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $D^k = P^{-1}M^kP$

$$\text{alors } D^{k+1} = D^k \times D = P^{-1}M^kP \times D = P^{-1}M^kP \times P^{-1}MP = P^{-1}M^{k+1}P$$

la propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$ et est vérifiée à ce rang donc on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}M^nP \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$$

3. On admet que, pour tout entier naturel n , $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , une expression de x_n et y_n en fonction de n .

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0 = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_n = -2 + \frac{3}{2^n} \\ y_n = -5 + \frac{7}{2^n} \end{cases}$

4. Montrer que, pour tout entier naturel n , le point A_n appartient à la droite \mathcal{D} .

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $7x_n - 3y_n - 1 = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} - 1 = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{D}$