Math93.com

Baccalauréat 2016 - S
Asie

Série S Obli. et Spé.
23 juin 2016
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Notation proposées pour l'exercice.
Notons les évènements : A « la fleur vient de la serre A », B « la fleur vient de la serre B » et F « la fleur vient donne un fruit ».

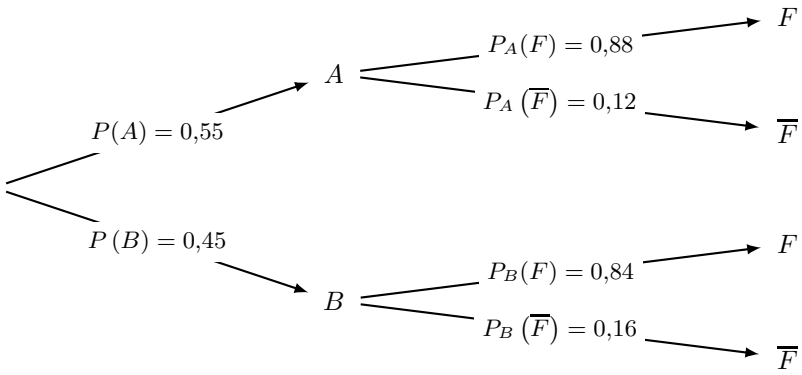
- Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres A et B : 55% dans la serra A, 45% dans la B donc :

$$P(A) = 0,55 \text{ et } P(B) = 0,45$$

- Dans la serre A, la probabilité de donner un fruit est de 0,88 et dans la serre B de 0,84 donc :

$$P_A(F) = 0,88; P_B(F) = 0,84 \Longrightarrow P_A\left(\overline{F}\right) = 0,12; P_B\left(\overline{F}\right) = 0,16$$

On peut résumer ces données dans un arbre :



Affirmation 1 (Vraie)

La probabilité qu'une fleur donne un fruit est 0,862.

Preuve
On cherche $P(F)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap A) + P(F \cap B) \\ P(F) &= P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) \\ P(F) &= 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 \\ P(F) &= 0,484 + 0,378 \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{p(F) = 0,862}$$

L'affirmation 1 est donc vraie.

Affirmation 2 (Fausse)

On constate qu'une fleur, choisie au hasard donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A , arrondie au millième, est égale à 0,439.

Preuve

On a cherche $P_F(A)$ or :

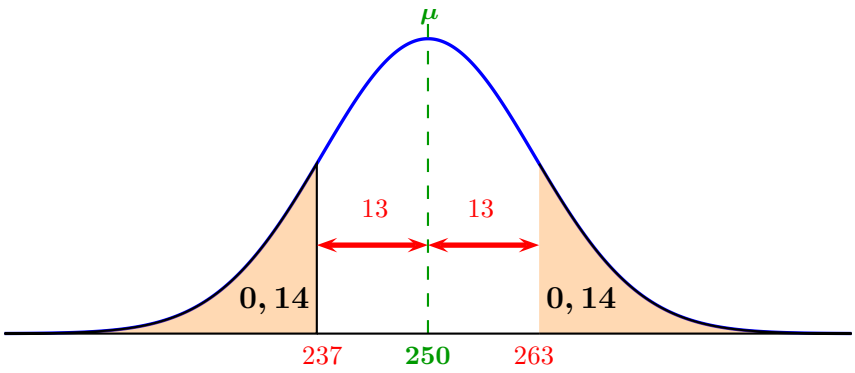
$$P_F(A) = \frac{P(F \cap A)}{P(F)} = \frac{P_A(F) \times P(A)}{P(F)} = \frac{0,55 \times 0,88}{0,862} \approx \underline{0,561}$$

L'affirmation 2 est donc fausse.

Partie B

La masse (en gramme) d'une barquette est modélisée par une v.a. X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de « la masse de la barquette est entre 237 g et 263 g » .



$$P(X \leq 237) = 0,14 = P(X \geq 263)$$

On a donc d'après les propriétés de symétrie de la loi normale :

$$1 = P(X < 237) + P(237 \leq X \leq 263) + P(X > 263)$$

Soit

$$\begin{aligned} P(237 \leq X \leq 263) &= 1 - P(X < 237) - P(X > 263) \\ &= 1 - 0,14 - 0,14 = \underline{0,72} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(237 \leq X \leq 263) = 0,72}$$

La probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes » est de 0,72.

2. On note Y la v.a. définie par $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

2. a. Quelle est la loi de la variable Y ?

Propriété 1

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Donc ici, puisque X suit la loi normale $\mathcal{N}(250\ ;\ \sigma^2)$, la v.a. $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

©ISSN 2272-5318

2. b. Démontrer que $P\left(Y \leq -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

On cherche ici une valeur approchée à 10^{-0} de σ sachant d'après la question **(B.1.)** que $P(237 \leqslant X \leqslant 263) = 0,72$, or :

$$P(237 \leqslant X \leqslant 263) = 0,72 \iff P\left(\frac{237-250}{\sigma} \leqslant \frac{X-250}{\sigma} \leqslant \frac{263-250}{\sigma}\right) = 0,72$$
$$\iff P\left(\frac{-13}{\sigma} \leqslant Y \leqslant \frac{13}{\sigma}\right) = 0,72$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite et on rappelle que :

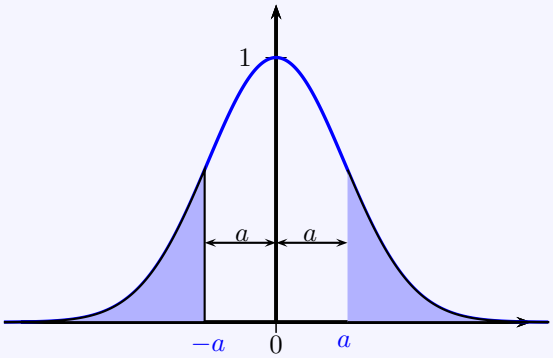
Propriété 2

Soit Y une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

2. b. 1. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(Y \leq t)$.

2. b. 2. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P(Y \leq -a) = P(Y \geq a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P(-a \leq Y \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait en appliquant la relation (3) de la propriété 2 :

$$P(237 \leqslant X \leqslant 263) = 0,72 \iff P\left(\frac{-13}{\sigma} \leqslant Y \leqslant \frac{13}{\sigma}\right) = 0,72$$
$$\iff 2\Phi\left(\frac{13}{\sigma}\right) - 1 = 0,72$$
$$\iff \Phi\left(\frac{13}{\sigma}\right) = \frac{0,72+1}{2} = 0,86$$

On applique alors la relation (2) de la propriété 2 :

$$\iff \Phi\left(-\frac{13}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{13}{\sigma}\right)$$
$$\iff \Phi\left(-\frac{13}{\sigma}\right) = 1 - 0,86$$
$$\iff P\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0,14$$

$$\boxed{P\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0,14}$$

2. c. En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Y \sim \mathcal{N}(0\,;\,1) \Longrightarrow -\frac{13}{\sigma} \approx -1,080\,331\,9$$

Soit arrondi à l'unité :

$$\boxed{\sigma \approx 12}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0{,}14\ ;\ 0\ ;\ 1) \approx \underline{-1{,}080\,331\,9}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0{,}14\ ;\ 0\ ;\ 1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0{,}14\ ;\ 0\ ;\ 1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0{,}14\ ;\ 1\ ;\ 0)$

©ISSN 2272-5318

3. On admet que σ vaut 12. On désigne par m et n des entiers.

3. a. Une barquette est conforme si sa masse se trouve dans l'intervalle $[250-n\,;\,250+n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

On cherche n tel que $P(250-n\leq X\leq 250+n)\geq 0,95$ sachant que la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(250\,;\,12^2\right)$. Notons que plus n est grand, plus la probabilité est grande et donc si on trouve un entier n qui vérifie l'égalité, ce dernier conviendra. On peut procéder comme lors de la question **(2.)**.

$$P(250-n\leq X\leq 250+n)=0,95\iff P\left(\frac{250-n-250}{12}\leq\frac{X-250}{12}\leq\frac{250+n-250}{12}\right)=0,95$$

Alors d'après la propriété 1, $\sim\mathcal{N}(0\,;\,1)$:

$$\iff P\left(\frac{-n}{12}\leq Y\leq\frac{n}{12}\right)=0,95$$

Soit

$$2\Phi\left(\frac{n}{12}\right)-1=0,95\iff\Phi\left(\frac{n}{12}\right)=\frac{0,95+1}{2}=0,975$$

On cherche $\dfrac{n}{12}$ tel que $P\left(Y\leq\dfrac{n}{12}\right)=0,975$ où Y qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(0\,;\,1^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{P\left(Y\leq\frac{n}{12}\right)=0,975\iff\frac{n}{12}\approx\underline{1,960}}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.975\ ;\ 0\ ;\ 1)\approx\underline{1,959\,964}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.975\ ;\ 0\ ;\ 1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.975\ ;\ 0\ ;\ 1)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.975\ ;\ 1\ ;\ 0)$

De ce fait on a puisque n est entier :

$$\boxed{12\times 1,960\approx 23,5\Longrightarrow\underline{n=24}}$$

***Remarque** : On peut vérifier que*

- Pour $n=23$ on a : $P(250-n\leq X\leq 250+n)=P(227\leq X\leq 273)\approx 0,945<0,95$;
- Pour $n=24$ on a : $P(250-n\leq X\leq 250+n)=P(226\leq X\leq 274)\approx 0,954>0,95$.

3. b. On considère qu'une barquette est conforme si sa masse est dans l'intervalle $[230\,;\,m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme , avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

D'après les propriété de la loi normale :

$$P(X\leq m)=P(X\leq 230)+P(230\leq X\leq m)$$

Or on cherche n tel que $P(230\leq X\leq m)=0,95$ et on peut calculer $P(X\leq 230)=0,5-P(230\leq X\leq 250)\approx 0,04779$
Donc on cherche n tel que :

$$P(X\leq m)\approx 0,99779$$

La variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(250\,;\,12^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à l'entier supérieur :

$$\boxed{P\left(X\leq m\right)\approx 0,99779\iff m=285}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.99779\ ;\ 250\ ;\ 12)\approx\underline{284,158\,24}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.99779\ ;\ 250\ ;\ 12)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.99779\ ;\ 250\ ;\ 12)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.99779\ ;\ 12\ ;\ 250)$

***Remarque** : On peut vérifier que*

- Pour $m=284$ on a : $P(230\leq X\leq m)=P(230\leq X\leq 284)\approx 0,94991<0,95$;
- Pour $n=285$ on a : $P(230\leq X\leq m)=P(230\leq X\leq 285)\approx 0,95044>0,95$.

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Fonction (EPI) — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit a un réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = a\,e^{ax} + a$, et $I(a) = \displaystyle\int_0^1 f_a(x)\,dx$.

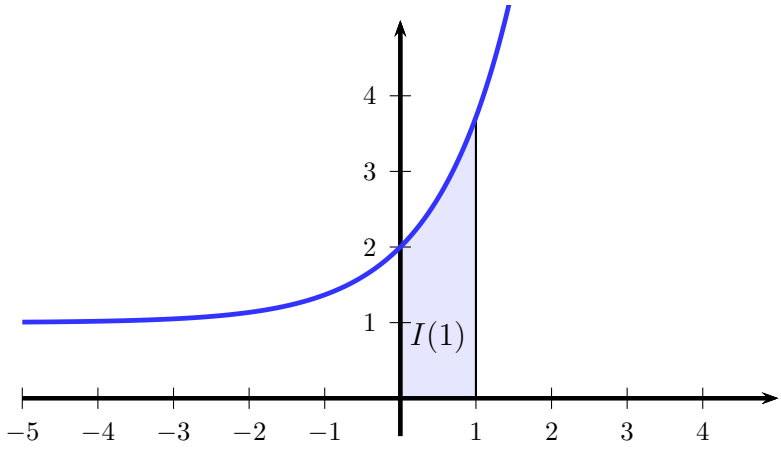
1. On pose $a = 0$. Déterminer $I(0)$.

$$f_a(x) = a\,\mathrm{e}^{ax} + a \Longrightarrow f_0(x) = 0 \Longrightarrow \underline{I(0) = 0}$$

2. On pose dans cette question $a = 1$.

2. a. Sans étude, représenter f_1 et faire apparaitre $I(1)$.

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_1(x) = \mathrm{e}^{x} + 1 \end{array} \right. \quad \text{et } I(1) = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^{x} + 1)\,\mathrm{d}x$$



2. b. Calculer $I(1)$.

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x} + 1$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^{x} + x$ donc :

$$\boxed{I(1) = \int_0^1 (\mathrm{e}^{x} + 1)\,\mathrm{d}x = \Big[\ \mathrm{e}^{x} + x\ \Big]_0^1 = \mathrm{e} + 1 + 1 - 1 = \mathrm{e}}$$

3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2 ? Donnez-en un encadrement au millième.

- Une primitive de la fonction $x \longmapsto f_a(x) = a\,\mathrm{e}^{ax} + a$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax} + ax$ donc :

$$I(a) = \int_0^1 (a\,\mathrm{e}^{ax} + a)\,\mathrm{d}x = \Big[\ \mathrm{e}^{ax} + ax\ \Big]_0^1 = \mathrm{e}^{a} + a - 1 - 0$$

Donc

$$\boxed{I(a) = \mathrm{e}^{a} + a - 1}$$

- On cherche donc si il existe a tel que $I(a) = \mathrm{e}^{a} + a - 1 = 2$, pour cela on va étudier la fonction I sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. La fonction I est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ et on obtient facilement :

$$\forall a \in [0\ ;\ 1]\ ;\ I'(a) = \mathrm{e}^{a} + 1 > 0$$

La positivité de l'exponentielle implique donc que la fonction dérivée I' est strictement positive. La fonction I est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

$$I(0) = 0 \text{ et } I(1) = \mathrm{e} \approx 2,7$$

©ISSN 2272-5318

x	0	α	1
Signe de $I'(x)$		$+$	
I	0	2	e

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire sur $[0\,;\,1]$:

- La fonction I est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- L'image par I de l'intervalle $[0\,;\,1]$ est $[I(0)\,;\,I(1)]$ d'après le tableau de variations.
- On a :

$$I(0) = 0 < 2 < I(1) = \text{e} \approx 2,7$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $I(x) = 2$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

- **Valeur approchée**.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.001$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} I\,(0,792) & \approx & 1,9998 < 2 \\ I\,(0,793) & \approx & 2,0030 > 2 \end{array}\right.$, donc $0,792 < \alpha < 0,793$.

Une valeur approchée de α à 0.001 près est donc $\alpha \approx 0,793$.

©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Suite — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On définit la suite (u_n) pour tout entier n par : $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100 \end{cases}$.

1.

1. a. Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation.
Si on note u_n la masse en g de bactérie au jour n, alors on a $u_0 = 1000$. Le jour $(n+1)$, la masse augmente de 20% par rapport à celle u_n du jour d'avant et on perd 100 g. Augmenter de 20%, c'est multiplier par $1,2$ soit pour tout entier n :

$$u_{n+1} = 1,2u_n - 100$$

1. b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg . A l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

n	22	23
u_n	28 103.07	33 623.69

C'est donc le 23e jour que la masse de bactéries dépassera 30 kg.

1. c. Recopier et compléter cet algorithme.

Variables :	u et n sont des nombres

Traitement :	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \leq 3\,000$ faire
	  u prend la valeur $1,2u - 100$
	  n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher n

2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,000$.
Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(\mathcal{P}_n) \ : \ u_n \geq 1\,000$$

- **Initialisation**
Pour $n = 0$, le postulat $(\mathcal{P}_0)$ est vrai puisque :

$$u_0 = 1\,000 \geq 1\,000$$

- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, $(\mathcal{P}_n)$ soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$. On a donc :

$$u_n \geq 1\,000$$

En multipliant les deux membres par $1,2$ et en retranchant 100 on obtient

$$\underbrace{1,2u_n - 100}_{u_{n+1}} \geq 1,2 \times 1\,000 - 100 = 1\,100$$

$$u_{n+1} \geq 1\,100 \geq 1\,000$$

On a alors montré que $u_{n+1} \geq 1\,000$ et donc que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai.

©ISSN 2272-5318

- **Conclusion**
  On a montré que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat $(\mathcal{P}_n)$ vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{u_n \geq 1\,000}$$

2. b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1,2u_n - 100 - u_n \\ &= 0,2u_n - 100 \end{aligned}$$

Or on a montré lors de la question (2.a.) que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n \geq 1\,000$ soit

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,2u_n - 100 \geq 0,2 \times 1\,000 - 100 \\ u_{n+1} - u_n &\geq 200 - 100 = 100 \\ u_{n+1} - u_n &> 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier n, $v_n = u_n - 500$.

3. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 1\,000 \\ u_{n+1} &= 1,2 \times u_n - 100 \end{cases} \quad \Big| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n &= u_n - 500 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ v_{n+1} &= (1,2\,u_n - 100) - 500 \\ v_{n+1} &= 1,2 \times u_n - 600 \\ v_{n+1} &= 1,2 \times \left(u_n + \frac{-600}{1,2}\right) \\ v_{n+1} &= 1,2 \times (u_n - 500) \\ v_{n+1} &= 1,2 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,2$, et de premier terme $v_0 = 500$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 500 \\ v_0 &= 1\,000 - 500 \\ v_0 &= 500 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 &= 500 \\ v_{n+1} &= 1,2 \times v_n \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$, et de premier terme $v_0 = 500$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = 500 \times (1,2)^n}$$

©ISSN 2272-5318

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 500$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 500$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 500 \times (1{,}2)^n + 500}$$

3. c. Détermine la limite de la suites (u_n).

Par théorème

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $q > 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

De ce fait, ici $q = 1,2 > 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} 1,2^n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 500 \times (1,2)^n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 500 \times (1,2)^n + 500 = +\infty$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Partie B

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = \dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} \end{array} \right.$$

Avec t exprimé en jours et $f(t)$ en kg.

1.

1. a. Calculer $f(0)$.

$$\boxed{f(0) = 1}$$

1. b. Démontrer que pour tout réel t positif, $f(t) < 50$.

Par stricte positivité de l'exponentielle, pour tout réel t positif on a après composition par la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} < 1 \Longrightarrow \frac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} < 50$$

Donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+\ ;\ f(t) < 50}$$

1. c. Étudier le sens de variation de la fonction f.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 50 \times \dfrac{1}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction f est de la forme $50 \times \dfrac{1}{v}$ donc de dérivée $50 \times \dfrac{-v'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\ ;\ f(x) = 50 \times \frac{1}{v(x)} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{ll} v(x) & = 1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t} \\ v'(x) & = 49 \times (-0,2)\,\mathrm{e}^{-0,2t} = -9,8\,\mathrm{e}^{-0,2t} \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\ \ f'(x) = 50 \times \frac{-v'(x)}{v(x)^2} = 50 \times 9,8 \times \frac{1}{(1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t})^2} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{490}{(1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t})^2}}$$

©ISSN 2272-5318

1. d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = \dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} \end{array} \right.$$

Par théorème de composition des limite on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} (-0,2t) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{array} \right. \Bigg| \underset{\text{Th. composition}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$$

On déduit alors facilement que :

$$\lim_{t\to+\infty} 1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t} = 1 \Longrightarrow \boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 50}$$

2. Interpréter les résultat de la question 1.

Cela signifie que la masse de bactérie, partant de 1kg, va croître vers 50 kg sans jamais ni atteindre 50 kg.

3. Résoudre l'inéquation $f(t) > 30$ et répondre au problème.

$$\begin{aligned} f(t) > 30 &\iff \frac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} > 30 \\ &\iff \frac{1}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} > \frac{3}{5} \end{aligned}$$

On compose par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (l'ordre change) :

$$\begin{aligned} f(t) > 30 &\iff 1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t} < \frac{5}{3} \\ &\iff \mathrm{e}^{-0,2t} < \frac{\frac{5}{3}-1}{49} = \frac{2}{147} \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f(t) > 30 &\iff -0,2t < \ln\frac{2}{147} \\ &\iff t > \frac{\ln\frac{2}{147}}{-0,2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(t) > 30 \iff t > \frac{\ln\frac{2}{147}}{-0,2} \approx 21,49}$$

Donc la masse de bactéries dépassera les 30 kg à partir de 22e jour, plus précisément, au cours du 21e si on suppose l'évolution continue.

©ISSN 2272-5318