# Baccalauréat S Centres étrangers CORRIGÉ
# 10 juin 2016

## Exercice I (4 points)

1. **Affirmation 1** Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production.

   Soit M la variable aléatoire exprimant sa masse, en gramme. M suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.

   On a $p(M \geqslant 187) = p(187 \leqslant X \leqslant 200) + p(M > 200) = p(187 \leqslant X \leqslant 200) + 0,5$.

   A la calculatrice, on a $p(187 \leqslant X \leqslant 200) > 0,4$ et par conséquent $p(M \geqslant 187) > 0,9$.

   La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est supérieure à $0,9$.

   **Affirmation 1 : VRAIE**

2. **Affirmation 2**

   Considérons la fonction $f$ définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \cos(x)$.

   $f$ est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) = 1 + \sin(x)$.

   Pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $1 + \sin(x) > 0$.

   On en déduit que $f$ est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Comme $f$ est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f$ est continue sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   On a de plus $f(0) = -1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

   On a $0 \in \left[-1\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   On applique à $f$ le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle et on peut affirmer que l'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   **Affirmation 2 : VRAIE**

   *Dans les questions 3. et 4., l'espace est rapporté à un repère orthonormal et l'on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui admettent pour représentations paramétriques respectives :*

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = \quad 4t \end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -5t' + 3 \\ y = \quad 2t' \\ z = \quad t' + 4 \end{array}\right.,\ t' \in \mathbb{R}$$

3. **Affirmation 3**

   Déterminons un vecteur directeur de chacune des ces deux droites.

   Soit $\overrightarrow{u}_1$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et Soit $\overrightarrow{u}_2$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$

   On a $\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

On a : $\left\{\begin{array}{l} 1+2t=-5t'+3 \\ 2-3t=2t' \\ 4t=t'+4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1+2t=-20t+20+3 \\ 2-3t=8t-8 \\ t'=4t-4 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} t=1 \\ t=10/11 \\ 4t=t'+4 \end{array}\right.$

Le système n'a pas de solution. les droites ne sont pas sécantes.

**Affirmation 3 : FAUSSE**

4. **Affirmation 4**

Le plan $P$, d'équation $x+2y+z-3=0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

On a d'une part $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}_1=0$ .

D'après la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$, le point A de coordonnées A(1 ; 2 ; 4) est un point de $\mathscr{D}_1$.

Ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de $P$.

On en déduit que $\mathscr{D}_1$ est parallèle à $P$

**Affirmation 4 : VRAIE**

## Exercice II (6 points)

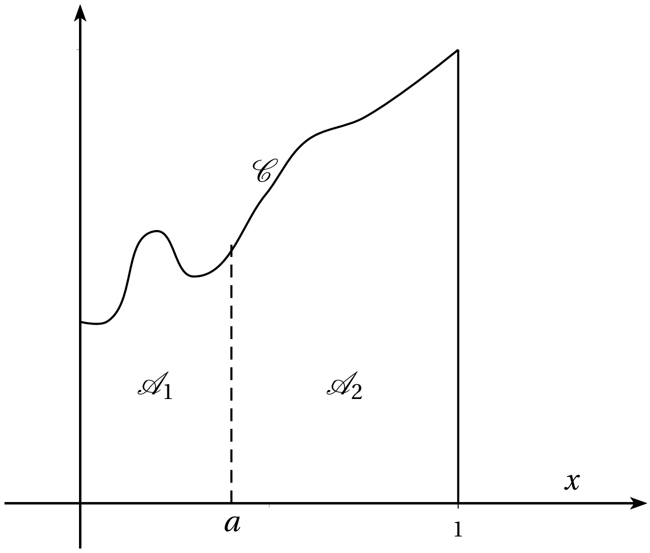
Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, continue et positive sur cet intervalle, et $a$ une réel tel que $0<a<1$.

On note :

— $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal :

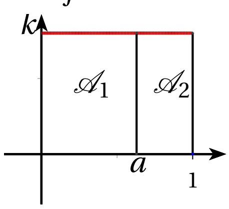
— $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x=0$ et $x=a$ d'autre part.

— $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x=a$ et $x=1$ d'autre part.




### Partie A : Étude de quelques exemples

1. **a.** Soit $f$ une fonction constante strictement positive sur [0 ;1].




Alors il existe un réel $k>0$ tel que pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)=k$.

Pour tout réel $a\in]0\ ;\ 1[$, on a : $\mathscr{A}_1=ka$ et $\mathscr{A}_2=(1-a)k$.

On a : $\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_2 \iff ka=k(1-a)$. Et comme $k>0$, $\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_2 \iff a=\dfrac{1}{2}$.

Ce qui prouve que si la fonction $f$ est continue , constante et strictement positive sur $[0\ ;\ 1]$, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales pour une seule valeur de $a$ et $a=\dfrac{1}{2}$.

**b.** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x)=x$.

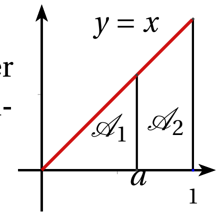
$f$ est continue sur $[0\ ;\ 1]$ et la fonction $F$ définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f$.

On a : $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{1}{2}a^2$

et : $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^1 = 1 - \frac{1}{2}a^2.$

On en déduit pour $a \in ]0\ ;\ 1[$ : $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff \dfrac{1}{2}a^2 = 1 - \dfrac{1}{2}a^2 \iff a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Remarque : on peut aussi tout simplement calculer les aires du triangle et du trapèze sur le graphique ci-contre et égaliser




**2.** **a.** À l'aide d'intégrales, exprimons, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

Comme $f \geqslant 0$ sur $[0;1]$, on a : $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ et $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**b.** On note $F$ une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Soit $a$ un réel de $]0;1[$ qui satisfait la condition (E), c'est à dire tel que $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$.

Si F est une primitive de $f$ sur $[0;1]$, alors

$(\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Rightarrow F(a) - F(0) = F(1) - F(a))$ et finalement :

Si $a$ un réel de $]0;1[$ qui satisfait la condition (E) alors $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}.$

Supposons maintenant que F est une primitive de $f$ telle que $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}.$

On a : $\mathscr{A}_1 = F(a) - F(0) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2} - F(0) = \dfrac{F(1)-F(0)}{2}$

et : $\mathscr{A}_2 = F(1) - F(a) = F(1) + \dfrac{F(0)+F(1)}{2} = \dfrac{F(1)-F(0)}{2}$

Si F est une primitive telle que $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$ alors $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ et la condition (E) est vérifiée : la réciproque est vraie.

**3.** Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

**a.** Considérons la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Montrons que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel $a$.

$f$ est continue sur $[0\ ;\ 1]$ et admet pour primitive $F(x) = \mathrm{e}^x$.

On a $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^a = \mathrm{e}^a - 1$ et $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_a^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^a.$

On en déduit que :

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Rightarrow \mathrm{e}^a - 1 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^a \iff \mathrm{e}^a = \frac{1+\mathrm{e}}{2} \iff a = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right).$$

**b.** Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}.$

Vérifions que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

On a d'une part : $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{5}} f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_0^{\frac{2}{5}} = \frac{-1}{\frac{2}{5}+2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$

D'autre part : $\displaystyle\int_{\frac{2}{5}}^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_{\frac{2}{5}}^1 = \frac{-1}{3} + \frac{1}{\frac{2}{5}+2} = \frac{1}{12}$

On a pour $a = \dfrac{2}{5}$, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$. La condition (E) est vérifiée.

Remarque : pour ces deux questions on peut utiliser A. 2. b., c'est à dire $a$ est solution de (E) si et seulement si $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$

**Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de $a$**

Dans cette partie, on considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de $[0~;~1]$ par $f(x) = 4-3x^2$.

**1.** Démontrons que si $a$ est un réel satisfaisant la condition (E), alors $a$ est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Si $a$ est un réel satisfaisant la condition (E),on a vu au A. 2. b que si F est une primitive de $f$ alors :

$$F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2}.$$

Pour tout réel $x$ de $[0~;~1]$ , la fonction $f$ définie par $f(x) = 4-3x^2$ admet comme primitive sur $[0~;~1]$, la fonction $F$ définie par $F(x) = 4x - x^3$.

On a alors : $F(0) = 0$ et $F(1) = 3$ et :

$F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2} \iff 4a-3a^3 = 3 \iff a = \dfrac{a^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.

Par conséquent, si $a$ est un réel satisfaisant la condition (E), $a$ est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0~;~1]$. On note $a$ cette solution.

**2.** On considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ de $[0~;~1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

**a.** Calculons $u_1$.

On a $u_1 = g(u_0) = g(0) = \dfrac{3}{8}$

**b.** Démontrons que la fonction $g$ est croissante sur l'intervalle $[0~;~1]$.

$g$ est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$, $g'(x) = \dfrac{3}{4}x^2 \geqslant 0$. On en déduit que $g$ est croissante sur $[0;1]$.

**c.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Considérons la proposition $(P_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

**Initialisation** $(0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1)$ est vraie.

**Hérédité** Comme $g$ est croissante sur $[0;1]$,

$$(0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1) \Rightarrow (g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(1)).$$

Mais $g(0) = \dfrac{3}{8} > 0$ et $g(1) = \dfrac{5}{8} < 1$.
On en déduit :

$$(0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1) \Rightarrow (0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant g(1)).$$

**Conclusion**

$P_0$ est vraie.

Pour tout entier naturel $n$, $(P_n \Rightarrow P_{n+1})$ est vraie.

D'après l'axiome de récurrence, $P_n$ est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

**d.** Prouvons que la suite $(u_n)$ est convergente.
On vient de démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, autrement dit que la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 1. On peut en déduire qu'elle converge. Soit L sa limite.
Par définition de $u_n$, et par unicité de la limite, on en déduit que $g(L) = L$ et L est solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ d'où $L = a$.

**e.** On admet que le réel $a$ vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$.
A la calculatrice, on obtient ; $u_{10} = 0,38980784$ à $10^{-8}$ près.

## Exercice III **(5 points)**

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

**Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage**

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

**1.** L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

**a.** Pour chaque personne il n'y a que deux issues possibles : répondre/ne pas répondre.
Si de plus on fait l'hypothèse que les choix des personnes sont indépendants, on peut affirmer que $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

**b.** On a : $P(X \geqslant 400) = 1 - P(X < 400) = 1 - P(X \leqslant 399)$.
La calculatrice donne $P(X \leqslant 399) \simeq 0,0573$ et $P(X \geqslant 400) \simeq 0,9427$.
La meilleure valeur approchée parmi les solutions proposées est 0,94.

**2.** Déterminons combien de personnes l'institut doit interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.
On peut déjà affirmer que $n \leqslant 700$.

Une exploration à la calculatrice donne $n = 694$ car si Y désigne la variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n$ et $p = 0,6$ on a pour $n = 694$ : $p(Y \geqslant 400) \geqslant 0,9$ et pour $n = 693$ : $p(Y \geqslant 400) < 0,9$.

Il suffit donc d'interroger 694 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

**Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population**

Dans cette partie, on suppose que $n$ personnes ont répondu à la question ,et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille $n$ (où $n$ est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

**1.** Un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale est de la forme :
$\left[f_{obs} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f_{obs} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Et ici avec $f_{obs} = 0,29$, on a $\left[0,29 - \dfrac{1}{\sqrt{n}};0,29 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

**2.** L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % a pour amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
$\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \iff \sqrt{n} \geqslant \dfrac{2}{0,04} \iff n \geqslant 2\,500.$
Il suffit d'interroger plus de 2 500 personnes pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance au niveau de 95 % soit inférieure à $0,04$.

**Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses**

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :
— soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
— soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.
Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. on prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- $F$ l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- $A$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

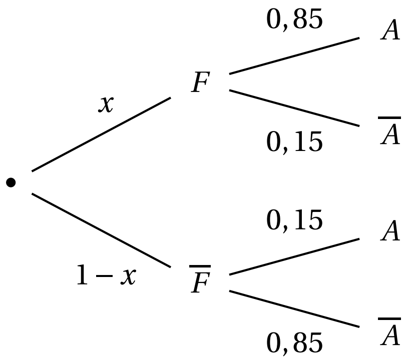
Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

**1.** L'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
On en déduit que $P_{\overline{F}}(A) = P_F\left(\overline{A}\right) = 0,15$.

Et comme $P_F(A) + P_F\left(\overline{A}\right) = 1$, on a : $p_F(A) = 0,85$.

**2.** On pose $x = P(F)$.

**a.** On a l'arbre de probabilité ci-dessous.




**b.** D'après la formule des probabilités totales,

$P(A) = P(A \cap F) + P\left(A \cap \overline{F}\right)$.

Mais $P(A) = 0,29$, $P(A \cap F) = 0,85x$ et $P\left(A \cap \overline{F}\right) = 0,15(1-x)$.

On en déduit que $x$ est solution de $0,29 = 0,85x + 0,15(1-x)$.

**3.** Déterminons, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Il suffit de résoudre $0,29 = 0,85x + 0,15(1-x)$. On trouve $x = \dfrac{14}{70} = 0,2$.

20 % des personnes ayant répondu au sondage sont favorables au projet.

## Exercice IV (5 points)

**Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique**

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier $k$ allant de 0 à $n$, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note $M_k$ le point d'affixe $z_k$.
Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points $M_k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
**Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points**

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$.

**1.** Déterminons la forme algébrique de $z_1$.

On a : $z_1 = \left(1 + \dfrac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}} = \left(\dfrac{7}{6}\right)\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{7}{6}\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{7}{12} + \mathrm{i}\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

**2.** On a $z_0 = \mathrm{e}^0 = 1$ et $z_6 = \left(1 + \dfrac{6}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 2$.

**3.** Calculons la longueur de la hauteur issue de $M_1$ dans le triangle $OM_0M_1$ .

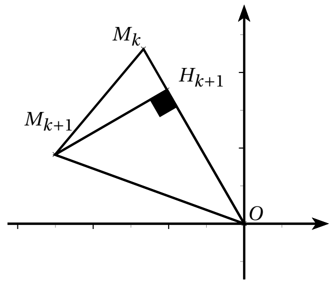
Soit H le pied de la hauteur issue de $M_1$ dans le triangle $OM_0M_1$. Comme O et $M_0$ sont pour abscisse 0, on a : $M_1H = \dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

L'aire du triangle $OM_0M_1$ est égale à : $\dfrac{1}{2}OM_0 \times M_1H = \dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

**Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points**

Dans cette partie, $n$ est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminons la longueur $OM_k$.
   On a $OM_k = |z_k| = 1 + \dfrac{k}{n}$, car pour tout entier naturel $n$ est un entier supérieur ou égal à 2, tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le module de $\text{e}^{\text{i}\frac{2k\pi}{n}}$ vaut 1.
2. Soit $k$ entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
   $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right) = \arg(z_k) = \dfrac{2k\pi}{n}$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \arg(z_k) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n}$ .
   Or $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) - \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right)$ à $2\pi$ près.
   On en déduit que $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n} - \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2\pi}{n}$ à $2\pi$ près.
3. Pour $k$ entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, calculons la longueur de la hauteur issue de $M_{k+1}$ dans le triangle $OM_kM_{k+1}$.
   Soit $H_{k+1}$ le pied de la hauteur issue de $M_{k+1}$ dans le triangle $OM_kM_{k+1}$.




   On a : $\dfrac{M_{k+1}H_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
   Mais $OM_{k+1} = 1 + \dfrac{k+1}{n}$ et $\sin\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
   On en déduit que pour $k$ entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,
   $M_{k+1}H_{k+1} = \left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
4. On admet que l'aire du triangle $OM_kM_{k+1}$ est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
   L'algorithme suivant permet de calculer l'aire $A_n$ lorsqu'on entre l'entier $n$ :

| | |
|---|---|
| VARIABLES | $A$ est un nombre réel |
| | $k$ est un entier |
| | $n$ est un entier |
| TRAITEMENT | Lire la valeur de $n$ |
| | $A$ prend la valeur 0 |
| | Pour $k$ allant de 0 à $n-1$ |
| | $A$ prend la valeur $A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$ |
| | Fin Pour |
| SORTIE | Afficher $n$ |

   On entre dans l'algorithme $n = 10$
   On obtient le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0,323 | 0,711 | 1,170 | 10705 | 2,322 | 3,027 | 3,826 | 4,726 | 5,731 | 6,848 |

5. On admet que $A_2 = 0$ et que la suite $(A_n)$ converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$.
   En L6 tant que $A < 7,2$
   En L13 Afficher $n$.

## Exercice V (5 points)

**Candidat/e/s ayant choisi la spécialité mathématique**

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice $A$, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note $A$ la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

### Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

<table>
<tr><td>Étape 1</td><td>On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.</td></tr>
<tr><td>Étape 2</td><td>On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers $x_1$ et $x_2$ tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :
<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>N</td><td>O</td><td>P</td><td>Q</td><td>R</td><td>S</td><td>T</td><td>U</td><td>V</td><td>W</td><td>X</td><td>Y</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Étape 3</td><td>On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $Y = AX$.</td></tr>
<tr><td>Étape 4</td><td>On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où $r_1$ est le reste de la division euclidienne de $y_1$ par 26 et $r_2$ celui de la division euclidienne de $y_2$ par 26.</td></tr>
<tr><td>Étape 5</td><td>On associe aux entiers $r_1$ et $r_2$ les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2.<br>Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.</td></tr>
</table>

**Question :** utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

HI donne $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 105 \end{pmatrix}$

Mais $51 \equiv 25[26]$ et $105 \equiv 1[26]$.

On en déduit que HI est codé par $Y = \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire ZB.

LL donne $X = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$

$AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \end{pmatrix}$

Mais $77 \equiv 25[26]$ et $154 \equiv 24[26]$.

On en déduit que LL est codé par $Y = \begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix}$, c'est à dire ZY.

On en déduit que HILL est codé ZBZY.

### Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit $a$ un entier relatif premier avec 26.
   Démontrons qu'il existe un entier relatif $u$ tel que $u \times a \equiv 1$ modulo 26.
   Comme $a$ un entier relatif premier avec 26, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au + 26v = 1$ et alors $au \equiv 1[26]$
2. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| VARIABLES : | $a, u$, et $r$ sont des nombres ($a$ est naturel et premier avec 26) |
| TRAITEMENT : | Lire $a$ |
| | $u$ prend la valeur 0, et $r$ prend la valeur 0 |
| | Tant que $r \neq 1$ |
| | $u$ prend la valeur $u + 1$ |
| | $r$ prend la valeur du reste de la division euclidienne de $u \times a$ par 26 |
| | Fin du Tant que |
| SORTIE | Afficher $u$ |

   On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.
   a. On a : étape 1 u=1 ; ua=21 ; r=21
      étape 2 u=2 ; ua=42 ; r=16
      étape 3 u=3 ; ua=63 ; r=11
      étape 4 u=4 ; ua=84 ; r=6
      étape 5 u=5 ; ua=105 ; r=1

      On a le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

| $u$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 0 | 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

   b. En déduire que $5 \times 21 \equiv 1$ modulo 26.
3. On a $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note $I$ la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. $12A - A^2 = 12\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 24 \\ 84 & 84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 39 & 24 \\ 84 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 21I.$
   b. On vient de voir que $12A - A^2 = 21I$.
      Mais $12A - A^2 = (12I - A) \times A$
      En posant $B = 12I - A = 12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ on a $BA = 21I$.
   c. Démontrons que si $AX = Y$, alors $21X = BY$.
      $AX = Y \Rightarrow BAX = BY \Rightarrow 21IX = BY \Rightarrow 21X = BY$

**Partie C - Déchiffrement**

On veut déchiffrer le mot VLUP.
On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}X$.
Si $r_1$ et $r_2$ sont les restes respectifs de $y_1$ et $y_2$ dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

**1.** Démontrons que : $\begin{cases} 21x_1 &= 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 &= -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$

On vient de voir que si $AX = Y$, alors $21X = BY$.

Or $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Si $21X = BY$ alors $21\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ou encore

$\begin{cases} 21x_1 &= 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 &= -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} 21x_1 &= 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 &= -7y_1 + 5y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \times 21x_1 &= 35y_1 - 10y_2 \\ 5 \times 21x_2 &= -35y_1 + 25y_2 \end{cases}$

Mais d'après 2 : $21 \times 5 \equiv 1[26]$.

$35 \equiv 9[26]$

$-10 \equiv 16[26]$

$-35 \equiv 17[26]$

$25 \equiv 25[26]$

$y_1 \equiv r_1\ [26]$

$y_2 \equiv r_2\ [26]$

$\begin{cases} 21x_1 &= 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 &= -7y_1 + 5y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &\equiv 9r_1 + 16r_2\ [26] \\ x_2 &\equiv 17r_1 + 25r_2\ [26] \end{cases}$

**3.** Déchiffrons le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Pour VL associé à la matrice $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$.

On a : $y_1 = 21 = r_1$ et $y_2 = 11 = r_2$. On en déduit :

$\begin{cases} x_1 &\equiv 9 \times 21 + 16 \times 11\ [26] \\ x_2 &\equiv 17 \times 21 + 25 \times 11\ [26] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &\equiv 1\ [26] \\ x_2 &\equiv 8\ [26] \end{cases}$

VL était le code BI

Pour UP associé à la matrice $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

On a : $y_1 = 20 = r_1$ et $y_2 = 15 = r_2$. On en déduit :

$\begin{cases} x_1 &\equiv 9 \times 20 + 16 \times 15\ [26] \\ x_2 &\equiv 17 \times 20 + 25 \times 15\ [26] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &\equiv 4\ [26] \\ x_2 &\equiv 13\ [26] \end{cases}$

UP était le code EN

VLUP est le code de BIEN.