Math93.com

Baccalauréat 2016 - S
Centres Étrangers

Série S Obli. et Spé.
8 juin 2016
Correction

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Vrai/Faux — 4 points

Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique.

Affirmation 1 (Vraie)

La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187g est supérieur à 0,9.

Preuve.
La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 200 et d'écart type 10, or on a :

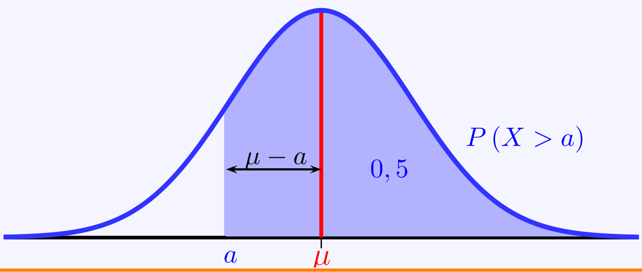
Propriété 1 ($P(X > a)$; $a < \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = P(a < X < \mu) + 0,5}$$



Donc ici :

$$\boxed{P(X > 187) = P(187 < X < 200) + 0,5 \approx 0{,}903\,2 > 0,9}$$

<u>L'affirmation 1 est donc vraie</u>.

Calculatrice : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(187, 200, 200, 10) + 0,5 \approx 0{,}903\,2$$

Affirmation 2 (Vraie)

L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Preuve.
Soit f la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x - \cos x \end{array} \right.$$

Cette fonction est dérivable sur I en tant que somme de fonctions dérivables sur I. On a alors :

$$f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$$

car

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \ ; \ -1 \leq \sin x \leq 1$$

On a donc

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 \ \text{ et } \ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $f'(x)$		$+$	
f	-1	0	$\frac{\pi}{2}$

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire :

- La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$;
- L'image par f de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ est $\left[f(0)\,;\,f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car :

$$f(0) = -1 < 0 < f < f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

L'affirmation 2 est donc vraie.

 ©ISSN 2272-5318

Les représentations paramétriques des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont :

$$\mathscr{D}_1 \ : \ \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 4t \end{cases} \ , \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 \ : \ \begin{cases} x = -5t'+3 \\ y = 2t' \\ z = t'+4 \end{cases} \ , \ t' \in \mathbb{R}$$

Affirmation 3 (Fausse)

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

Preuve.
On va chercher des éventuelles solutions du système :

$$\begin{cases} 1+2t = -5t'+3 \\ 2-3t = 2t' \\ 4t = t'+4 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2t = -5t'+3 \\ 2-3t = 2t' \\ \boxed{4t-4 = t'} \end{cases}$$

On va alors injecter $4t-4=t'$ dans les deux premières égalités

$$\begin{cases} 1+2t = -5t'+3 \\ 2-3t = 2t' \\ 4t = t'+4 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2t = -5\underbrace{(4t-4)}_{t'}+3 \\ 2-3t = 2\underbrace{(4t-4)}_{t'} \\ 4t-4 = t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1+2t = -20t+20+3 \\ 2-3t = 8t-8 \\ 4t-4 = t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 22t = 22 \\ -11t = -10 \\ 4t-4 = t' \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} t = 1 \\ t = \dfrac{10}{11} \\ 4t-4 = t' \end{cases}}$$

Ce système ne possède donc pas de solution. Les droites ne sont pas sécantes et <u>l'affirmation 3 est donc fausse</u>.

Affirmation 4 (Vraie)

La droite $\mathscr{D}_1$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+2y+z-3=0$.

Preuve.
Un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} . \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2-6+4 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{n}$$

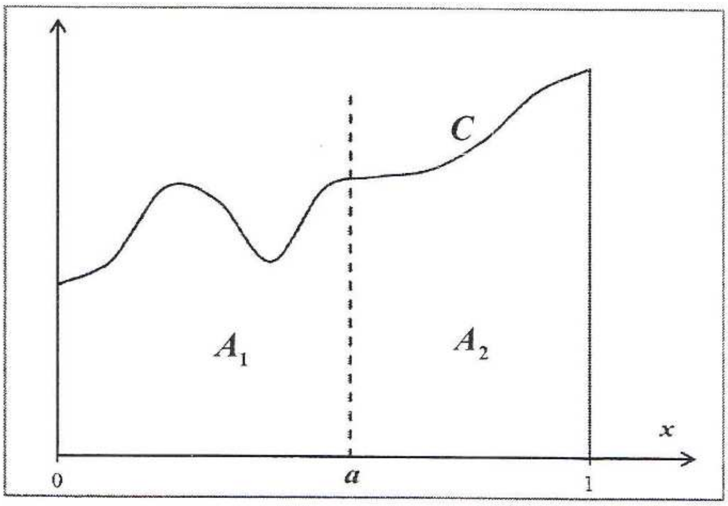
Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$, <u>l'affirmation 4 est donc vraie</u> .

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Fonctions 6 points

Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique.

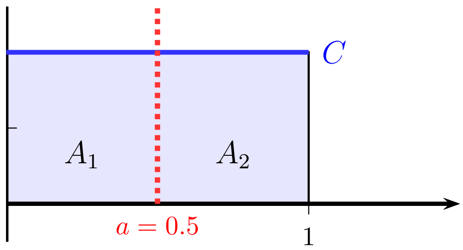
Soit f définie, continue et positive sur $[0\,;\,1]$ et a un réel tel que $0 < a < 1$. On note A_1 l'aire du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C, les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
Puis on note A_2 l'aire du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C, les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
La condition E est : « *les aires A_1 et A_2 sont égales* »



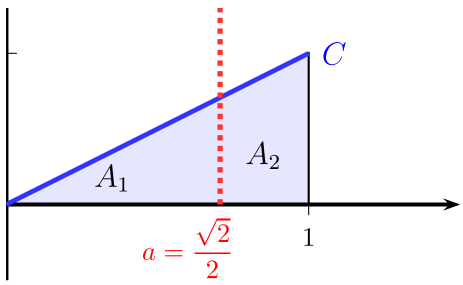
Partie A - Étude de quelques exemples

1. Vérifier dans les cas suivants que la condition E est remplie pour un unique réel a, et déterminer sa valeur.

1. a. f est une fonction constante strictement positive ;
Si f est constante, A_1 et A_2 sont les aires de deux rectangles de même largeur. Il suffit de prendre $a = 0,5$, les rectangles auront ainsi les mêmes dimensions.



1. b. f est définie pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ par $f(x) = x$.



Dans ce cas les aires A_1 et A_2 sont respectivement celles d'un triangle rectangle et d'un trapèze. On peut calculer directement les aires en fonctions de a où utiliser l'intégration. En unités d'aire on a :

$$A_1 = \int_0^a x\,\mathrm{d}x = \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_0^a = \frac{a^2}{2} \text{ et } A_2 = \int_a^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_a^1 = \frac{1-a^2}{2}$$

Soit

$$A_1 = A_2 \iff \frac{a^2}{2} = \frac{1-a^2}{2} \iff a^2 = \frac{1}{2}$$

Et puisque $0 < a < 1$, la seule solution possible est

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

 ©ISSN 2272-5318

2.

2. a. A l'aide d'intégrales, exprimer (en unités d'aire) les aires A_1 et A_2.
On a :

$$\boxed{A_1 = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ et } \ A_2 = \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

2. b. On note F une primitive de f. Montrer que si a vérifie E alors $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$. La réciproque est-elle vraie ?

- Si a vérifie E alors

$$\begin{aligned}
A_1 = A_2 &\iff \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\iff \left[\ F(x)\ \right]_0^a = \left[\ F(x)\ \right]_a^1 \\
&\iff F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \\
&\iff 2F(a) = F(1) + F(0) \\
\underline{A_1 = A_2} &\iff \boxed{F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2}}
\end{aligned}$$

- Réciproquement. On a procédé par équivalence dans la question précédente, donc la réciproque est vraie.

3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

3. a. f est définie pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x}$. Vérifier que (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.
Une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ étant $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ on a d'après le résultat de la question **(2.b.)** :

$$\begin{aligned}
A_1 = A_2 &\iff F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2} \\
&\iff \mathrm{e}^{a} = \frac{\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{1}}{2} = \frac{1 + \mathrm{e}^{1}}{2}
\end{aligned}$$

On compose alors par la fonction $x \longmapsto \ln x$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$A_1 = A_2 \iff \boxed{a = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)}$$

3. b. f est définie pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$. Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

On rappelle que la dérivée d'une fonction de la forme $\dfrac{1}{u}$ (où u dérivable ne s'annulant pas) est $\dfrac{-u'}{u^2}$ donc une primitive de la fonction $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$ étant $F\ :\ x \longmapsto \dfrac{-1}{x+2}$. On a alors d'après le résultat de la question **(2.b.)** :

$$\begin{aligned}
A_1 = A_2 &\iff F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2} \\
&\iff \frac{-1}{a+2} = \frac{\frac{-1}{0+2} + \frac{-1}{1+2}}{2} \\
&\iff \frac{-1}{a+2} = \frac{\frac{-1}{2} + \frac{-1}{3}}{2} \\
&\iff \frac{-1}{a+2} = \frac{-5}{12} \\
&\iff -(a+2) = \frac{12}{-5} \ \text{ et } \ a \neq -2 \\
A_1 = A_2 &\iff \boxed{a = \frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

©ISSN 2272-5318

Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

On considère dans cette partie la fonction f définie par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1. Démontrer que si a est solution de (E) alors il vérifie l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.

Une primitive de la fonction $f\ :\ x \longmapsto 4 - 3x^2$ est $x \longmapsto 4x - 3\dfrac{x^3}{3} = 4x - x^3$.
On a d'après le résultat de la question **(2.b.)** :

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\iff F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2} \\ &\iff 4a - a^3 = \frac{4\times 0 - 0^3 + 4 - 1^3}{2} = \frac{3}{2} \\ &\iff 4a = a^3 + \frac{3}{2} \\ A_1 = A_2 &\iff \boxed{a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}} \end{aligned}$$

Donc si a est solution de (E) alors il vérifie l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$

2. g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour n entier par $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.

2. a. Calculer u_1.

$$\boxed{u_1 = g\left(u_0\right) = g(0) = \frac{3}{8}}$$

2. b. Démontrer que g est croissante sur $[0\,;1]$.
La fonction g est dérivable sur $[0\,;1]$ et pour tout x de $[0\,;1]$ on a :

$$g'(x) = \frac{3x^2}{4} \geq 0$$

La fonction g est croissante sur $[0\ ;1]$.

2. c. Démontrer par récurrence que pour tout entier n on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$0 \leq u_0 = 0 \leq u_1 = \frac{3}{8} \leq 1$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

  – On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

  On compose alors cette inégalité par la fonction g qui est strictement croissante sur $[0\,;1]$, l'ordre est inchangé :

$$0 \leq \frac{3}{8} = g(0) \leq \underbrace{g\left(u_n\right)}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{g\left(u_{n+1}\right)}_{u_{n+2}} \leq g\left(1\right) = \frac{5}{8} \leq 1$$

  Soit

$$0 \leq \frac{3}{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

  – On a alors montré que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1}$$

2. d. Prouver que (u_n) est convergente. A l'aide des opérations sur les limites, montrer que sa limite est égale à a.

- D'après la question **(B.2.c.)**, suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite L qui vérifie $0 \leq L \leq 1$ (car elle est aussi minorée par 0).
- Par définition, pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} = g\left(u_n\right)$$

Par passage à la limite, la fonction g étant une fonction polynôme du second degré (donc continue) on a par application des opérations sur les limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n \to +\infty} g\left(u_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n^3}{4} + \dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{L^3}{4} + \dfrac{3}{8} = g(L) \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} g\left(u_n\right) \Longleftrightarrow L = g(L)$$

Or on a montré lors de la question **(B.1.)** que si a est solution de (E) alors il vérifie l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8} = g(x)$.
De ce fait, la limite L de la suite (u_n) est bien a.

2. e. On admet que a vérifie $0 \leq a - u_{10} \leq 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

A 10^{-8} près on a :

$$\boxed{u_{10} \approx 0,389\,807\,84}$$

Exercice 3. Probabilités 5 points

Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique.

Partie A - Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet que la probabilité accepte de répondre à la question est 0,6.

1. L'institut interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes acceptant de répondre.

1. a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

Vérifions les hypothèses de validation d'une *loi binomiale*.

- Une personne interrogée a *2 états* : elle accepte de répondre ou pas. La probabilité d'accepter est : $p = 0,6$.
- Il y a 700« tirages ». Chaque tirage est *indépendant, identique* et *aléatoire*.

De ce fait, la variable aléatoire X désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière *indépendante*, de 700 *épreuves de Bernoulli* de paramètre $p = 0,6$.
La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$, notée $\mathscr{B}(700\ ;\ 0,6)$.

1. b. Quelle est la meilleur valeur approchée de $P(X \geq 400)$ parmi les nombres suivants : $0,92$; $0,93$; $0,94$ et $0,95$?

Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 700$ et $p = 0,6$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{700}{k} \times 0,6^k \times (0{,}4)^{700-k}$$

On passant à l'évènement contraire on a :

$$\boxed{P(X \geq 400) = 1 - P(X \leq 399) \approx 0,94}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

TIStat.binomFdR(700; 0, 6; 399) ≈ 0,942 7

2. Quel nombre de personne doit-on interroger au minimum pour que, avec une probabilité supérieure à $0,9$, le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur à 400 ?

Soit Y_n la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes acceptant de répondre au sondage sur n personnes interrogées. D'après ce qui précède, la v.a. Y suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0,6$. On cherche donc n tel que :

$$P(Y_n \geq 400) > 0,9$$

On utilise alors la calculatrice :

- Pour $n = 690$ alors $P(Y_{690} \geq 400) \approx 0,869\,9$;
- Pour $n = 691$ alors $P(Y_{691} \geq 400) \approx 0,879$;
- Pour $n = 692$ alors $P(Y_{692} \geq 400) \approx 0,888$;
- Pour $n = 693$ alors $P(Y_{693} \geq 400) \approx 0,897$;
- Pour $n = 694$ alors $P(Y_{694} \geq 400) \approx 0,905 > 0,9$;

Le nombre de personne à interroger au minimum pour que, avec une probabilité supérieure à $0,9$, le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur à 400 est donc de $n = 694$.

©ISSN 2272-5318

Partie B - Proportion de personnes favorables au projet

On admet dans cette question que n personnes on répondues à la question (avec $n \geq 50$) et que ces personnes constituent un échantillon de taille n. Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet.

1. Déterminer un intervalle de confiance au seuil 95% de la proportion de personnes favorables au projet.

Théorème 2 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p.

Si les conditions suivantes sont remplies : $\left\{\begin{array}{ll} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & nf \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) \geq 5 \end{array}\right.$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

La fréquence observée est donc $f = 29\%$ de personnes favorables au projet et la taille de l'échantillon est $n = \geq 50$ soit :

$$\left\{\begin{array}{ll} \checkmark & n \geq 50 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 14,5 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 35,5 \geq 5 \end{array}\right.$$

Les conditions d'application sont vérifiée, donc un intervalle de confiance au seuil de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \boxed{\left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$$

2. Déterminer la valeur minimale de n pour que l'amplitude soi inférieure ou égale à 0,04.

L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ donc on cherche n entier positif tel que :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04$$

On compose alors par la fonction inverse qui est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ soit :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04 \Longleftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2}{0,04} = 50$$

On compose alors par la fonction carrée qui est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ soit :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04 \Longleftrightarrow n \geq 50^2 = \underline{2\,500}$$

©ISSN 2272-5318

Partie C - Correction due à l'insincérité de certaines personnes

Parmi les personnes qui ont accepté de répondre, 29% sont favorables au projet. L'institut estime qu'il y a 15% de réponses non sincères, quelque soit l'opinion de la personne interrogée. On note F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » et A l'évènement « la personne affirme être favorable au projet ». On a $P(A) = 0,29$.

1. En interprétant l'énoncé, indiquer les valeur de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

- $P_F(A)$ correspond à la probabilité que la personne affirme être favorable au projet sachant qu'elle l'est en réalité, donc qu'elle est sincère. Or l'institut estime qu'il y a 15% de réponses non sincères, quelque soit l'opinion de la personne interrogée, donc 85% de réponses sincères. On a alors :

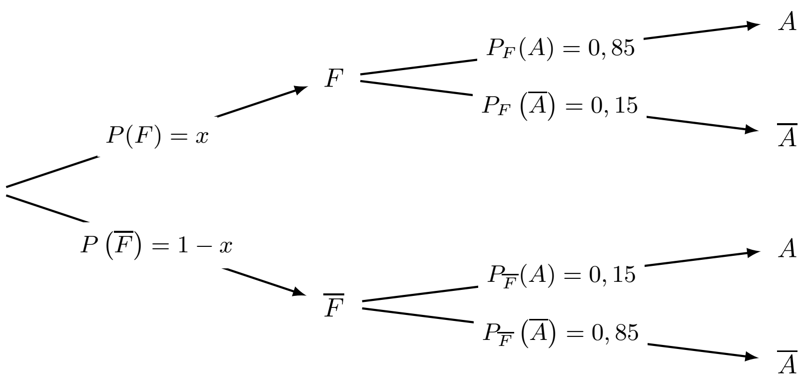
$$\boxed{P_F(A) = 0,85}$$

- $P_{\overline{F}}(A)$ correspond à la probabilité que la personne affirme être favorable au projet sachant qu'elle ne l'est pas en réalité, donc qu'elle n'est pas sincère. Or l'institut estime qu'il y a 15% de réponses non sincères, quelque soit l'opinion de la personne interrogée. On a alors :

$$\boxed{P_{\overline{F}}(A) = 0,15}$$

2. On pose $x = P(F)$.

2. a. Recopier et compléter l'arbre.



2. b. En déduire une égalité vérifiée par x.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) = P(A \cap F) + P\left(A \cap \overline{F}\right) &\iff 0,29 = P_F(A) \times P(F) + P_{\overline{F}}(A) \times P\left(\overline{F}\right) \\ &\iff \underline{0,29 = 0,85 \times x + 0,15 \times (1 - x)} \end{aligned}$$

On pouvait s'arrêter là puisqu'on demandait une égalité

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondues au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.
On veut calculer $P(F) = x$ or dans la question précédente **(C.2.b)** on a montré que x vérifiait l'égalité :

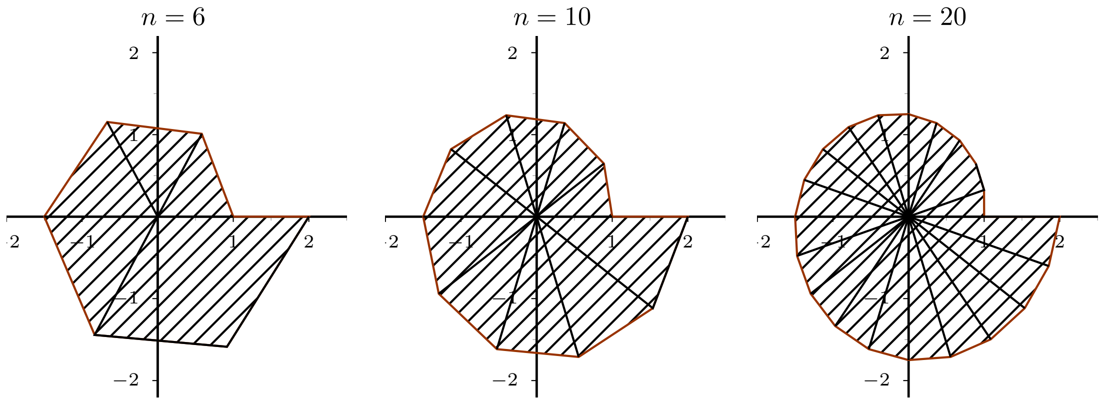
$$\begin{aligned} 0,29 = 0,85x + 0,15 - 0,15x &\iff 0,14 = 0,7x \\ &\iff \boxed{x = \frac{0,14}{0,7} = 0,2} \end{aligned}$$

Donc <u>20% des personnes sont réellement favorable au projet</u>.

Exercice 4. Obligatoire - Complexes — 5 points

Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$. *Soit* n *un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier* k *allant de 0 à* n*, on définit les nombres complexes* $z_k = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ *et on note* M_k *le point d'affixe* z_k*. Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne visée reliant tous les points* M_k *avec* $0 \leqslant k \leqslant n$*. Par exemple, pour les entiers* $n = 6$, $n = 10$ *et* $n = 20$ *:*



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1+\dfrac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

$$z_1 = \left(1+\frac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}} = \frac{7}{6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 = \frac{7}{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

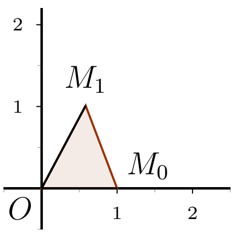
$$\boxed{z_1 = \frac{7}{12} + \mathrm{i}\,\frac{7\sqrt{3}}{12}}$$

2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.

$$\boxed{z_0 = \left(1+\frac{0}{6}\right)\mathrm{e}^{0} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{z_6 = \left(1+\frac{6}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{6}} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 2}$$

Donc z_0 et z_6 sont des entiers, respectivement 1 et 2.

3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.



La longueur h de la hauteur issue de M_1 dans OM_0M_1 correspond à la partie imaginaire de z_1 soit

$$h = \mathcal{Im}(z_1) = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors :

$$\boxed{\mathcal{A}_{OM_0M_1} = \frac{h \times OM_0}{2} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{12}\times 1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}\ u.a.}$$

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2 et pour $0 \leq k \leq n$ on a toujours $z_k = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\boxed{OM_k = |z_k| = \left|\left(1+\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1+\frac{k}{n}}$$

2. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

- On a d'une part :

$$\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right) = \arg z_k = \arg\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right) = \frac{2k\pi}{n} \mod 2\pi$$

- Et d'autre part :

$$\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \arg z_k = \arg\left(\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2(k+1)\pi}{n}}\right) = \frac{2(k+1)\pi}{n} \mod 2\pi$$

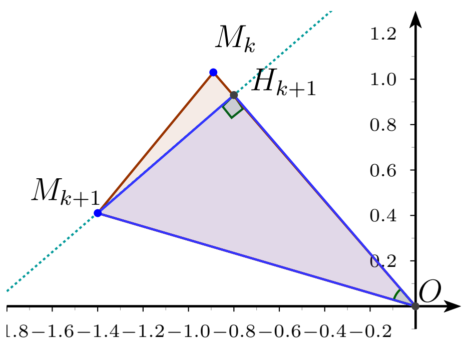
- On en déduit alors d'après la relation de Chasles sur les angles orientés que :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) &= \left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\\ &= -\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right) + \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\\ &= -\frac{2k\pi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} \mod 2\pi\\ &= -\frac{2k\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \mod 2\pi\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{n} \mod 2\pi}$$

3. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.



Soit H_{k+1} le pied de la hauteur de longueur h_{k+1} issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}. Le triangle $OH_{k+1}M_{k+1}$ est alors rectangle en H_{k+1} et :

$$\sin\left(\overrightarrow{OH_{k+1}}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \frac{H_{k+1}M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \frac{h_{k+1}}{OM_{k+1}}$$

- Or d'après la question **(B.2.)** :

$$\left(\overrightarrow{OH_{k+1}}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{n} \mod 2\pi$$

- Et d'après la question Or d'après la question **(B.1.)** :

$$OM_{k+1} = 1+\frac{k+1}{n}$$

Donc

$$h_{k+1} = M_{k+1}H_{k+1} = OM_{k+1}\times\sin\left(\overrightarrow{OH_{k+1}}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$$

$$\boxed{h_{k+1} = M_{k+1}H_{k+1} = \left(1+\frac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

4. On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$. L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES	A est un nombre réel
	k est un entier
	n est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de n
	A prend la valeur 0
	Pour k allant de 0 à $n-1$
	A prend la valeur $A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
	Fin Pour
SORTIE	Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$. Recopier et compléter le tableau qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	10705	2,322	3,027	3,826	4,726	$\boxed{5,731}$	$\boxed{6,848}$

5. On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$. Recopier et compléter les lignes $L6$ et $L13$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7,2$. On ne demande pas de déterminer n.

$L1$	VARIABLES	A est un nombre réel
$L2$		k est un entier
$L3$		n est un entier
$L4$	TRAITEMENT	n prend la valeur 2
$L5$		A prend la valeur 0
L6		$\boxed{\textbf{Tant que } A < 7,2}$
$L7$		n prend la valeur $n+1$
$L8$		A prend la valeur 0
$L9$		Pour k allant de 0 à $n-1$
$L10$		A prend la valeur $A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
$L12$		Fin Tant que
L13	**SORTIE**	$\boxed{\textbf{Afficher } n}$

Remarque : (non demandé)
La calculatrice nous donne :

- $A_{19} \approx 7,195$;
- $A_{20} \approx 7,208 > 7,2$;

Donc une valeur de $n = 20$.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Spécialité 5 points

Candidat/e/s ayant choisi la spécialité mathématique.

Dans tout l'exercice on note $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A : Chiffrement de Hill

Utiliser la méthode de chiffrement pour coder le mot HILL.

- **Étape 1 - On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives**.
  Donc ici
  $$HILL \longrightarrow HI - LL$$
- **Étape 2 - On associe aux lettres les deux entiers x_2 et x_2 correspondant au tableau**.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

  Donc ici
  $$HI \longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ et } LL \longrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$
- **Étape 3 - On transforme la matrice X en la matrice $Y = AX$**.
  Donc ici
  $$X_1 \longrightarrow Y_1 = AX_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 105 \end{pmatrix}$$
  $$X_2 \longrightarrow Y_2 = AX_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \end{pmatrix}$$
- **Étape 4 - On transforme la matrice Y en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où $r_1 \equiv y_1 \mod 26$ et $r_2 \equiv y_2 \mod 26$** .
  Donc ici
  $$Y_1 \longrightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_2 \longrightarrow R_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix}$$
- **Étape 5 - On associe aux entiers obtenus les deux lettres correspondantes au tableau**.
  $$R_1 = \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow ZB \text{ et } R_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix} \longrightarrow ZY$$
- **Conclusion** : Le mot $HILL$ se code ainsi en le mot $ZBZY$.

$$\boxed{\underline{HI - LL} \longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \; X_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} \longrightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} 51 \\ 105 \end{pmatrix} \; Y_2 = \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \end{pmatrix} \longrightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix} \; R_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{ZB - ZY}}$$

©ISSN 2272-5318

Partie B : Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26, montrer qu'il existe un entier relatif u tel que $u \times a \equiv 1 \mod 26$.

Théorème 3 (Bézout, 1730-1883)

Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, <u>si et seulement si</u>, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Soit :

$$\text{PGCD}\,(a\ ;\ b) = 1 \Longleftrightarrow \exists\,(u\ ;\ v) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ au + bv = 1$$

Remarque : C'est le groupe Bourbaki qui donne vers 1948 le nom de Bézout à ce théorème qui en fait est énoncé et démontré par le mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) dans ses « *Problèmes plaisans et délectables* » publié en 1624. Bézout démontre lui une généralisation de ce théorème aux polynômes en 1764 dans un mémoire présenté à l'académie des sciences.

Donc si a un entier relatif premier avec 26, d'après le théorème 3 dit de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$au + 26v = 1 \Longleftrightarrow u \times a \equiv 1 - 26v \mod 26 \Longleftrightarrow \underline{u \times a \equiv 1 \mod 26}$$

2. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	a, u, r sont des nombres (a est naturel et premier avec 26)
TRAITEMENT :	Lire a
	u prend la valeur 0 et r prend la valeur 0
	Tant que $r \neq 1$
	u prend la valeur $u + 1$
	r prend la valeur du reste de la division euclidienne de $u \times a$ par 26
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher u

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

2. a. Reproduire et compléter le tableau suivant jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

u	0	1	2	3	4	5
r	0	21	16	11	6	1

2. b. En déduire que $5 \times 21 \equiv 1 \mod 26$.

L'algorithme permet de fournir un entier naturel u tel que $u \times a \equiv 1 \mod 26$. Donc ici pour $a = 21$, l'algorithme a affiché la valeur $u = 5$ c'est à dire que :

$$\boxed{5 \times 21 \equiv 1 \mod 26}$$

3. On rappelle que $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note $I = Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a. Calculer la matrice $12A - A^2$.

$$12A - A^2 = 12\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 24 \\ 84 & 84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 39 & 24 \\ 84 & 63 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{12A - A^2 = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 21\,I}$$

©ISSN 2272-5318

3. b. En déduire la matrice B telle que $BA = 21I$.

On vient de montrer lors de la question **(B.3.a)** que $12A - A^2 = 21\ I$ or :

$$12A - A^2 = 21\ I \iff 12\ I \times A - A \times A = 21\ I \iff \underbrace{(12\ I - A)}_{B} A = 21\ I$$

La matrice B telle que $BA = 21I$ est donc

$$\boxed{B = 12\ I - A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}}$$

3. c. Démontrer que si $AX = Y$ alors $21X = BY$.

<u>Si $AX = Y$</u> alors en multipliant les deux membres par la matrice B on obtient :

$$BAX = BY$$

Et puisque d'après la question **(B.3.b)** la matrice B vérifie la relation $BA = 21I$ on a :

$$\underbrace{BA}_{21I} \times X = BY \iff \underline{21I \times X = BY}$$

Donc

$$\boxed{AX = Y \Longrightarrow 21X = BY}$$

Partie C : Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot $VLUP$.

1. Démontrer que $\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$.

On a montré lors de la question **(B.3.c)** que :

$$AX = Y \Longrightarrow 21X = BY \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Donc ici

$$21X = BY \iff 21 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \boxed{\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}}$$

2. En utilisant la question (B.2.), montrer que $\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26 \\ x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \mod 26 \end{cases}$.

En multipliant les 2 lignes du systèmes précédent par 5 on obtient :

$$\begin{cases} 5 \times 21x_1 = 5 \times 7y_1 - 5 \times 2y_2 \\ 5 \times 21x_2 = -5 \times 7y_1 + 5 \times 5y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 5 \times 21x_1 = 35y_1 - 10y_2 \\ 5 \times 21x_2 = -35y_1 + 25y_2 \end{cases}$$

On passe alors modulo 26 en utilisant le résultat de la question **(B.2.)** soit $5 \times 21 \equiv 1 \mod 26$:

$$\begin{cases} \underbrace{5 \times 21}_{\equiv 1 \mod 26} x_1 \equiv 35y_1 - 10y_2 \mod 26 \\ \underbrace{5 \times 21}_{\equiv 1 \mod 26} x_2 \equiv -35y_1 + 25y_2 \mod 26 \end{cases} \underset{\text{avec } 35 \equiv 9 \mod 26}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26 \\ x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \mod 26 \end{cases}}$$

3. Déchiffre le mot $VLUP$ associé aux matrices $\begin{pmatrix} \mathbf{21} \\ \mathbf{11} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{20} \\ \mathbf{15} \end{pmatrix}$.

On applique directement le résultat de la question précédente **(C.2.)** pour trouver x_1 et x_2 soit :

- **Avec la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{21} \\ \mathbf{11} \end{pmatrix}$:**

$$\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26 \\ x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \mod 26 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 9 \times 21 + 16 \times 11 \mod 26 \\ x_2 \equiv 17 \times 21 + 25 \times 11 \mod 26 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 1 \mod 26 \\ x_2 \equiv 8 \mod 26 \end{cases}$$

- **Avec la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{20} \\ \mathbf{15} \end{pmatrix}$:**

$$\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26 \\ x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \mod 26 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 9 \times 20 + 16 \times 15 \mod 26 \\ x_2 \equiv 17 \times 20 + 25 \times 15 \mod 26 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 4 \mod 26 \\ x_2 \equiv 13 \mod 26 \end{cases}$$

- **Conclusion** :

$$VL \longrightarrow \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow BI$$

$$VL \longrightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} \longrightarrow EN$$

La mot $VLUP$ se décode donc en le mot $BIEN$.

- Fin du devoir -

 ©ISSN 2272-5318