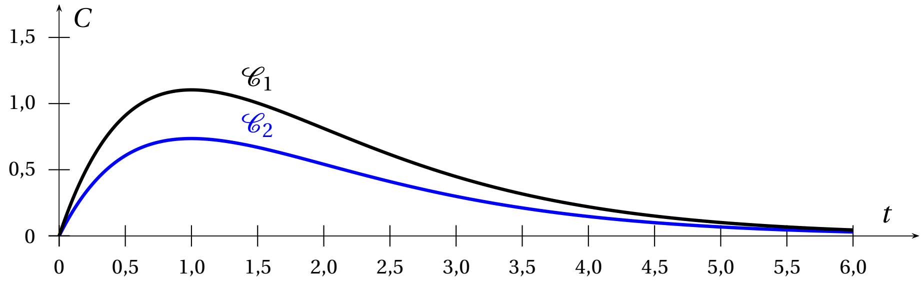
Exercice 1 - Pour tous les candidats **7 points**

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.
Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

> **Solution:** La vitesse est visiblement maximale pour $t = 0$ car c'est la tangente aux courbes en $O(0\ ;\ 0)$ qui semble avoir le coefficient directeur le plus élevé parmi toutes les tangentes.

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

> **Solution:** La courbe $\mathscr{C}_1$ montre que le taux d'alcoolémie de P_1 admet un maximum plus élevé que pour P_2.
> On en déduit que la personne la moins corpulente est P_1

3. Une personne à jeûn absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = Ate^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

> **Solution:**
> Première méthode (longue mais utilisable dans la partie B) :
> f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$.
> $$f = uv \Longrightarrow f' = u'v + uv' \text{ avec } \begin{cases} u(t) = At \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = A \\ v'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$
> $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = A(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ et $f'(0) = A$

Deuxième méthode (peut-être un peu plus astucieuse) :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} A\mathrm{e}^{-h} = A$ (limite finie)

On en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = A$

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Solution: L'affirmation est FAUSSE

si $A_1 > A_2$ alors $A_1 t\mathrm{e}^{-t} > A_2 t\mathrm{e}^{-t}$ car $t\mathrm{e}^{-t} > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$

On en déduit que la courbe associée à A_1 est au dessus de celle associée à A_2 donc la personne associée à A_1 est de plus faible corpulence que la personne associée à A_2

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Solution: On a vu dans la partie précédente que $\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = A(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ or $A\mathrm{e}^{-t} > 0$

donc $f'(t)$ est du signe de $1-t$, on peut donc déterminer les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

Solution:

La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1h après l'absorption .

Elle est alors d'environ $0{,}74\ g.l^{-1}$

3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution: $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} 2\times\frac{t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to+\infty} 2\times\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t}\right)} = 0$ par quotient

On en déduit que l'alcool finit par s'éliminer totalement.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que
$f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

Solution: f est continue et strictement croissante sur $[0\,,\,1]$ à valeurs dans $\left[0\,;\,\frac{2}{\mathrm{e}}\right]$

or $0{,}2 \in \left[0\,;\,\frac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une unique solution t_1 sur $[0\,,\,1]$

de même, f est continue et strictement décroissante sur $[1\,,\,+\infty[$ à valeurs dans $\left]0\,;\,\frac{2}{\mathrm{e}}\right]$

or $0{,}2 \in \left]0\,;\,\frac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une unique solution t_2 sur $[1\,,\,+\infty[$

b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

Solution: Par balayage, on obtient $t_1 \approx 0{,}112$ et $t_2 \approx 3{,}577$
donc Paul doit attendre au minimum 3 heures et 35 minutes avant de reprendre le volant.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à
5×10^{-3} g.L^{-1}.

a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

Solution: On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T \in R$
tel que pour tout $t > T$, $f(t) \in]-\epsilon\,;\,\epsilon[$
ici on pose $\epsilon = 5\times10^{-3}$
Donc il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable dans le sang

b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par
$f(t) = 2t\text{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur 3,5
	p prend la valeur 0,25
	C prend la valeur 0,21
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

Solution:

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Solution: La valeur affichée par l'algorithme est le temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.

Si on poursuit l'algorithme jusqu'à son terme, on obtient 8,25 à l'affichage donc il faut 8 h et 15 minutes pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang

Exercice 2 - pour tous les candidats 3 points

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

Solution: en C2 on entre « =B2+2*A2×A2+3*A2+5 » et en B3 on entre « =2*B2+2*A2×A2-A2 »

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Solution: Il semblerait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 7 \times 2^n$
on aurait alors $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ car $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $7 \times 2^0 - 2 \times 0^2 - 3 \times 0 - 5 = 7 - 5 = 2$
donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5$
alors $u_{k+1} = 2\left(7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5\right) + 2k^2 - k = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 7k - 10$
or $7 \times 2^{k+1} - 2(k+1)^2 - 3(k+1) - 5 = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 4k - 2 - 3k - 3 - 5 = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 7k - 10$
donc si $u_k = 7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5$, cela entraîne que $u_{k+1} = 7 \times 2^{k+1} - 2(k+1)^2 - 3(k+1) - 5$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée au rang 0

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 = 7 \times 2^n$

EXERCICE 3 - POUR TOUS LES CANDIDATS — 5 points

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0{,}2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

Solution: On cherche $P(X < 3)$.
La fonction densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}$$

$P(X < 3) = \displaystyle\int_0^3 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,dt = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^3 = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}451$

Donc la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes est bien environ 0,451

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

Solution: On cherche le plus petit réel T tel que $P(X < T) > 0{,}95$

$P(X < T) > 0{,}95 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2T} > 0{,}95 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2T} < 0{,}05 \iff \mathrm{e}^{0{,}2T} > 20 \iff 0{,}2T > \ln(20) \iff T > 5\ln(20)$

or $5\ln(20) \approx 14{,}98$. Donc le temps minimum à attendre est de 15 minutes.

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Solution: On sait que l'espérance de la variable aléatoire T est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$ (min).

Donc en deux heures on peut espérer voir en moyenne $\dfrac{120}{5} = 24$ étoiles filantes.

On peut espérer en moyenne voir 24 étoiles filantes pendant ces deux heures.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est 0,494.

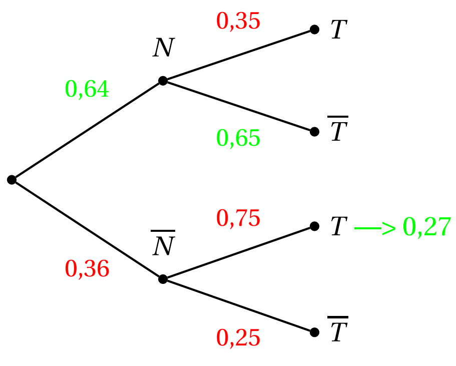
Solution: On considère les événements :

— N : « l'adhérent interrogé est un nouvel adhérent »

— T : « l'adhérent interrogé possède un télescope »

on peut alors illustrer la situation par un arbre pondéré :

les données de l'exercice sont en vert et celles déduites sont en rouge



On cherche $P(T)$

N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(N \cap T) + P\left(N \cap \overline{T}\right) \\ &= P(N) \times P_N(T) + 0{,}27 \\ &= 0{,}64 \times 0{,}35 + 0{,}27 \\ &= 0{,}494 \end{aligned}$$

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Solution: On cherche $P_T(N)$

$P_T(N) = \dfrac{P(T\cap N}{P(T)} = \dfrac{0{,}224}{0{,}494} \approx 0{,}453$

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.

L' astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

Solution: On ne connaît pas la proportion p d'habitants du village qui sont favorables à la coupure mais on fait une hypothèse sur sa valeur. Pour valider cette hypothèse on utilise donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

La taille de l'échantillon est $n = 100 \geqslant 30$ et la probabilité supposée p vérifie $np = 50 \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ on peut donc appliquer l'intervalle de fluctuation

$I_n = \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ soit ici $I_n = [0{,}402\ ;\ 0{,}598]$

or la fréquence observée est $f = \dfrac{54}{100} = 0{,}54 \in I_n$

Le résultat conforte donc l'astronome .

Exercice 4 - Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1** :
   Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \sqrt{2} + 3\text{i}$, $z_{\text{B}} = 1 + \text{i}$ et $z_{\text{C}} = -4\text{i}$ ne sont pas alignés.

Solution: VRAI

Soit $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{\sqrt{2} + 7\text{i}}{1 + 5\text{i}} = \dfrac{1}{16}\left(\sqrt{2} + 7\text{i}\right)(1 - 5\text{i}) = \dfrac{1}{16}\left((\sqrt{2} + 35) + (7 - 5\sqrt{2})\text{i}\right)$

$Z \notin \mathbb{R}$ donc $arg(Z) \neq 0(\pi)$ or $arg(Z) = arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)(2\pi)$

On en déduit que $\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right) \neq 0(\pi)$ donc A , B et C ne sont pas alignés.

2. Proposition 2 :

Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[\mathrm{i}(1+\mathrm{i})]^{2n}$ soit un réel strictement positif.

Solution: FAUX

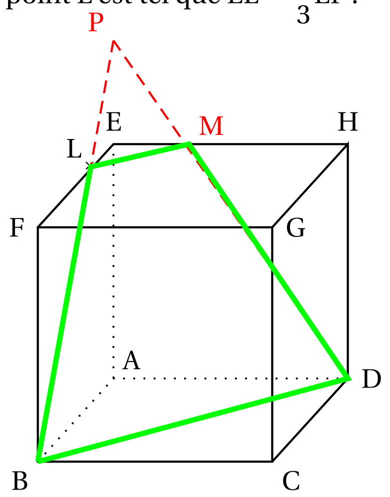
$\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

on a alors $[\mathrm{i}(1+\mathrm{i})]^{2n} = 2^n\mathrm{e}^{3\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}} = 2^n\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^n = 2^n(-\mathrm{i})^n$

Si n est un multiple de 4 alors $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

et on a $[\mathrm{i}(1+\mathrm{i})]^{2n} = 2^n(-\mathrm{i})^{4k} = 2^n\left((-\mathrm{i})^4\right)^k = 2^n \in \mathbb{R}^{+*}$ car $(-\mathrm{i})^4 = 1$

3. ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{\mathrm{EL}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EF}}$.



Proposition 3

La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.

Solution: FAUX

Il s'agit du trapèze $BLMD$

$(BL) \in (BAE)$ et (BL) n'est pas parallèle à (AE) donc elles sont sécantes en P.

$P \in (EAD)$ et $P \in (BL) \subset (BDL)$ donc $P \in (BDL)$

$(DP) \subset (EAD)$ et (DP) n'est pas parallèle à (EH) donc elles sont sécantes en M

Proposition 4

Le triangle DBL est rectangle en B.

Solution: FAUX

On se place dans le repère orthonormé $\left(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BF}\right)$

alors $B(0\,;\,0\,;\,0)$, $D(1\,;\,1\,;\,0)$ et $L\left(0\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)$

on a donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BL} = \dfrac{2}{3} \neq 0$ donc BDL n'est pas rectangle en B

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,5]$ et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2		3		4		5
Variations de f	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

Proposition 5 :
L'intégrale c est comprise entre 1,5 et 6.

Solution: FAUX
Un contre-exemple : on prend la fonction affine par morceaux décroissante sur $[2\,;\,3]$ et croissante sur $[3\,;\,5]$ définie par :
$f(2) = 3$; $f(2{,}001) = 0.001$; $f(3) = 0$;
$f(3{,}999) = 0{,}001$; $f(4) = 1$; $f(4{,}999 = 1{,}001$ et $f(5) = 2$, on montre que l'intégrale est légèrement supérieure à 1. L'affirmation est donc fausse.

Exercice 4 - Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**
   Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

Solution: VRAI
$n^2 + n = n(n+1)$

dernier chiffre de n	dernier chiffre de $n+1$	dernier chiffre de $n(n+1)$
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2
7	8	6
8	9	2
9	0	0

2. On considère la suite u définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n}\text{pgcd}(20\,;\, n).$$

Proposition 2
La suite (u_n) est convergente.

Solution: VRAI
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant \text{pgcd}(20\,;\,n) \leqslant 20$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{20}{n}$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{20}{n} = 0$
donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc (u_n) converge vers 0.

3. Proposition 3
Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$.

Solution: FAUX Exemple : si $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ alors $A \times B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
Pour tout entier naturel n, on note :

- A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité.
- B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.
- X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix}0{,}55 & 0{,}3\\ 0{,}45 & 0{,}7\end{pmatrix}$.

Proposition 4
La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.

Solution: VRAI $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = M \times X_n$ donc $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}55 & 0{,}3\\ 0{,}45 & 0{,}7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$
donc $P(B_{n+1}) = b_{n+1} = 0{,}45 \times a_n + 0{,}7 \times b_n = 0{,}45 \times P(A_n) + 0{,}7 \times P(B_n)$
or d'après les probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n)$
On a donc $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0{,}45$

Proposition 5
Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.

Solution: FAUX $\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix} = X_1 = M \times X_0 = \begin{pmatrix}0{,}55 \times a_0 + 0{,}3 \times b_0\\ 0{,}45 \times a_0 + 0{,}7 \times b_0\end{pmatrix}$
$b_1 = 3a_1 \iff 0{,}45 \times a_0 + 0{,}7 \times b_0 = 3(0{,}55 \times a_0 + 0{,}3 \times b_0) \iff 0{,}45 \times a_0 + 0{,}7 \times b_0 = 1{,}65 \times a_0 + 0{,}9 \times b_0$
donc $b_1 = 3a_1 \iff 1{,}2a_0 = -0{,}2b_0$
Ce résultat est absurde puisque a_0 et b_0 sont des probabilités donc des nombres positifs.