Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud

22 novembre 2016

EXERCICE 1 — **Commun à tous les candidats** — **5 points**

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de deux fonctions f et g définies sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On considère les points A(0,5 ; 1) et B(0 ; -1) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x)=(ax+b)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
On sait que le point O appartient à $\mathscr{C}_f$ donc $f(0)=0$ ce qui équivaut à $(0+b)\,\mathrm{e}^0=0$ ou encore $b=0$.
Donc $f(x)$ s'écrit $f(x)=ax\mathrm{e}^{-x^2}$.
La droite (OA) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en O, et elle a pour coefficient directeur 2, donc $f'(0)=2$.
$f(x)=ax\mathrm{e}^{-x^2}$ donc $f'(x)=a\times\mathrm{e}^{-x^2}+ax\times(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2}=\left(a-2ax^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$.
$f'(0)=2 \iff (a-0)\,\mathrm{e}^0=2 \iff a=2$; donc $f(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Désormais, on considère que $f(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $cd0$; $+\infty[$

2. a. On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\dfrac{2}{x}\times\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \text{on pose } X=x^2\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{\mathrm{e}^X}=0\end{array}\right\}\implies \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\end{array}\right\}\implies \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}\times\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=0 \iff \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

b. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on a déjà vu que $f(x)=\left(a-2ax^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}=\left(2-4x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$ puisque $a=2$.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x^2}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2-4x^2$ c'est-à-dire de $4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+x\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-x\right)$.

Sur $[0\ ;\ +\infty[$, la dérivée s'annule et change de signe pour $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 0,86$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+x\right)$		$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point B$(0\,;\,-1)$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

a. On sait que la dérivée de $x \longmapsto \text{e}^{u(x)}$ est $x \longmapsto u'(x)\,\text{e}^{u(x)}$, donc une primitive de $x \longmapsto u'(x)\,\text{e}^{u(x)}$ est $x \longmapsto \text{e}^{u(x)}$.

Donc la fonction $x \longmapsto -2x\text{e}^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \text{e}^{-x^2}$ donc une primitive de la fonction f est g définie par $g(x) = -\text{e}^{-x^2} + k$ où $k \in \mathbf{R}$.

$\mathscr{C}_g$ contient le point B$(0\,;\,-1)$, donc $g(0) = -1$, ce qui équivaut à $-\text{e}^0 + k = -1$ donc $k = 0$.

La primitive de f dont la courbe représentative passe par le point B est donc la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -\text{e}^{-x^2}$.

b. Soit m un réel strictement positif.

$I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,\text{d}t = g(m) - g(0) = -\text{e}^{-m^2} - (-1) = 1 - \text{e}^{-m^2}$

c. On cherche $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} I_m$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{m\to+\infty} -m^2 = -\infty\\ \text{on pose } M = -m^2\\ \displaystyle\lim_{M\to-\infty} \frac{X}{\text{e}^M} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{m\to+\infty} \text{e}^{-m^2} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{m\to+\infty} 1 - \text{e}^{-m^2} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{m\to+\infty} I_m = 1.$$

4. a. La fonction f est
- continue sur I
- positive sur I
- telle que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^m f(t)\,\text{d}t = 1$

donc la fonction f est une fonction de densité de probabilité sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité.

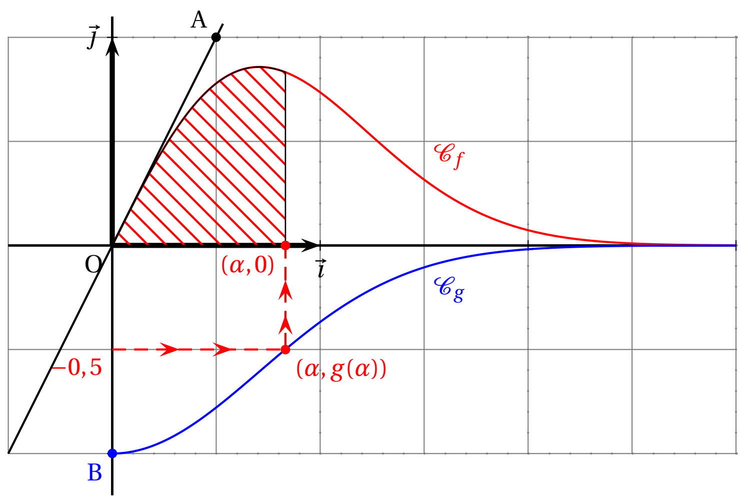
Pour tout x de I, $P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t = g(x) - g(0)$.

Or $g(0) = -\text{e}^0 = -1$, donc $P(X \leqslant x) = g(x) + 1$.

c. Soit α le réel tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.

$$\begin{aligned} P(X \leqslant \alpha) = 0,5 &\Longleftrightarrow g(\alpha) + 1 = 0,5 \Longleftrightarrow g(\alpha) = -0,5\\ &\Longleftrightarrow -\text{e}^{-\alpha^2} = -0,5 \Longleftrightarrow -\alpha^2 = \ln 0,5\\ &\Longleftrightarrow -\alpha^2 = -\ln 2 \Longleftrightarrow \alpha^2 = \ln 2\\ &\Longleftrightarrow \alpha = \sqrt{\ln 2} \text{ car } \alpha > 0\end{aligned}$$

d. On construit le point de coordonnées $(\alpha\,;\,0)$ et on hachure la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$:



EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 3 points

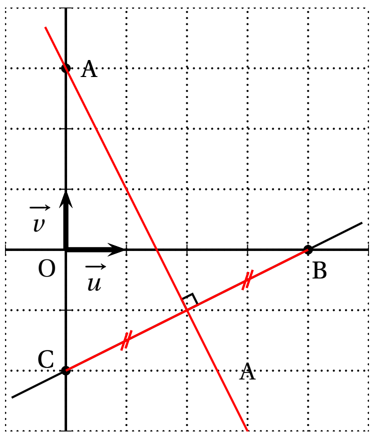
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\text{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition vraie

- Soit B le point d'affixe $b = 4$ et C le point d'affixe $c = -2\,\text{i}$; on appelle M le point d'affixe z.
  $|z-4| = |z+2\text{i}| \iff |z-b| = |z-c| \iff \text{MB} = \text{MC}$
  Donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\text{i}|$ est la médiatrice Δ du segment [BC].
- On appelle a l'affixe du point A.
  $\text{AB} = |b-a| = |4-3\,\text{i}| = \sqrt{16+9} = 5$
  $\text{AC} = |c-a| = |-2\,\text{i}-3\,\text{i}| = |-5\,\text{i}| = 5$
  Donc le point A est à égale distance de B et de C ; il appartient donc à la droite Δ, médiatrice de [BC].



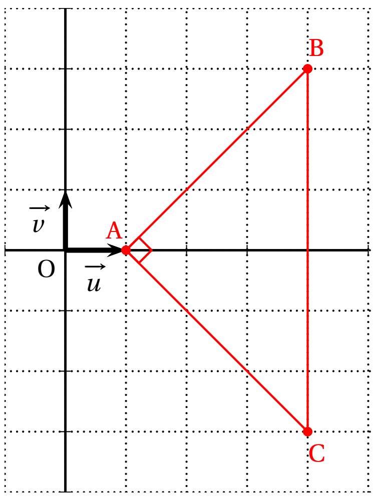
L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\text{i}|$ est donc la droite médiatrice du segment [BC] et cette droite passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right) = 0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition vraie

- L'équation $z-1=0$ a pour solution le nombre $a=1$ affixe d'un point appelé A.
- On résout dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2-8z+25=0$; $\Delta = 64-100 = -36$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées $b = \dfrac{8+6\,\text{i}}{2} = 4+3\,\text{i}$ et $c = 4-3\,\text{i}$.
  Ces deux nombres complexes b et c sont les affixes de deux points qu'on appelle B et C.
- L'équation (E) a donc trois solutions qui sont les affixes des trois points A, B et C.
- $\text{AB}^2 = |b-a|^2 = |4+3\,\text{i}-1|^2 = |3+3\,\text{i}|^2 = 9+9 = 18$
  $\text{AC}^2 = |c-a|^2 = |4-3\,\text{i}-1|^2 = |3-3\,\text{i}|^2 = 9+9 = 18$
  $\text{BC}^2 = |c-b|^2 = |4-3\,\text{i}-4-3\,\text{i}|^2 = |-6\,\text{i}|^2 = 36$
- $18+18 = 36$ donc $\text{AB}^2+\text{AC}^2 = \text{BC}^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.



Donc les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\text{i}\right)^8$.

Proposition fausse

Soit z le nombre complexe $-\sqrt{3}+\text{i}$; on cherche θ un argument de z.

$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1} = \sqrt{4} = 2$

On cherche donc θ tel que $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$; un argument de z est donc $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

D'après le cours, un argument de z^8 est $8\theta = \dfrac{40\pi}{6} \equiv \dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Les nombres $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$ ne sont pas congrus modulo 2π donc la proposition est fausse.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 3 points

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

1. **a.** On calcule les premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{5}{6}$

On peut conjecturer que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- **Initialisation**
  Pour n=0, $u_n = u_0 = 0$ et $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{0}{1} = 0$.
  Donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel quelconque.
  On suppose que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ (hypothèse de récurrence).
  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est à dire $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.
  $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{2(n+1)-n}{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{2n+2-n}{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{n+2}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2}$
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
  On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}$.
- **Conclusion**
  On a vérifié que la propriété était vraie au rang 0.
  On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout n.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b. Pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

D'après le cours : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1$.

On peut donc en déduire que la limite ℓ de la suite (u_n) est égale à 1.

2. On complète l'algorithme pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$:

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur $0,5$
Traitement :	Tant que $\|b - a\| > 10^{-3}$
	n prend la valeur $n+1$
	a prend la valeur b
	b prend la valeur $\dfrac{1}{2-b}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Explications

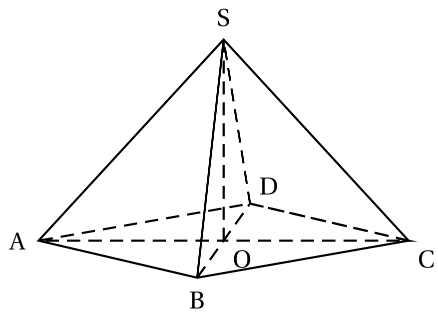
Pour n donné, a joue le rôle de u_n et b celui de u_{n+1}.

Si l'objectif $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$ n'est pas atteint, on passe au rang $n+1$: on remplace u_n par u_{n+1}, c'est-à-dire a par b, et on remplace u_{n+1} par u_{n+2}, c'est-à-dire b par $\dfrac{1}{2-b}$.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 4 points

Partie A : Un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm.
On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



1. On sait que O est le centre du carré ABCD donc OA = OC.

On sait que la pyramide SABCD est équilatère à base carrée donc SA = SC.

On se place dans le triangle SAC.

SA = SC donc le triangle SAC est isocèle.

OA = OC donc O est le milieu de [AC] et donc (SO) est la médiane issue de S du triangle SAC.

Comme le triangle SAC est isocèle de sommet principal S, la médiane issue de S est aussi une médiatrice ; on en déduit que (SO) est perpendiculaire à (AC).

En se plaçant dans le triangle (SBD), on démontre de même que (SO) est perpendiculaire à (BD).

La droite (SO) est perpendiculaire à deux droites sécantes (AC) et (BD) du plan (ABC) donc la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. Le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

- La base de la pyramide est le carré ABCD dont les diagonales mesurent 24 cm.
  Dans le triangle ABC isocèle rectangle en B on a, d'après le théorème de Pythagore, $\text{AB}^2 + \text{BC}^2 = \text{AC}^2$ ce qui équivaut à $2\text{AB}^2 = 24^2$ ou $\text{AB}^2 = 288$.
  L'aire du carré ABCD est $\text{AB}^2 = 288$ cm^2.
- D'après le texte, SO = OA donc $\text{SO} = \dfrac{24}{2} = 12$.

Le volume de la pyramide est donc $V = \dfrac{288 \times 12}{3} = 1152$ cm^3.

Partie B : Dans un repère

On considère le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\, \overrightarrow{\text{OA}},\, \overrightarrow{\text{OB}},\, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$.
On peut donc dire que les points O, A, B et S ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,0\,;\,0)$, $(1\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,1\,;\,0)$ et $(0\,;\,0\,;\,1)$.
Comme O est le milieu de [AC] et de [BD], on peut dire que les points C et D ont pour coordonnées respectives $(-1\,;\,0\,;\,0)$ et $(0\,;\,-1\,;\,0)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].
Donc P et Q ont pour coordonnées respectives $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

a. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,-3)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\text{PC}}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}\,;\,0\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.
  $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\text{PC}} = 1 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) + 0 + (-3) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{PC}}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{QC}}$ a pour coordonnées $\left(-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.
  $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\text{QC}} = 1 \times (-1) + 1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + (-3) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{QC}}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{\text{PC}}$ et $\overrightarrow{\text{QC}}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{\text{PC}}$ et $\overrightarrow{\text{QC}}$ non colinéaires, donc il est normal au plan (QPC).

b. Le plan (QPC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\text{CM}}$ soient orthogonaux.
Si M a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, le vecteur $\overrightarrow{\text{CM}}$ a pour coordonnées $(x+1\,;\,y\,;\,z)$.
$\overrightarrow{\text{CM}} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\text{CM}} \perp \overrightarrow{n} = 0 \iff 1 \times (x+1) + 1 \times y - 3 \times z = 0 \iff x + y - 3z + 1 = 0$
Le plan (PQC) a pour équation $x + y - 3z + 1 = 0$.

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

a. La droite (SH) est orthogonale au plan (PQC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est normal au plan (PQC).
La droite (SH) contient le point S de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$.
La droite (SH) a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & k \\ y & = & k \\ z & = & 1-3k \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbf{R}$

b. $H \in (SH) \cap (PQC)$ donc les coordonnées de H sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & k \\ y & = & k \\ z & = & 1-3k \\ x+y-3z+1 & = & 0 \end{array}\right.$

On a donc $k+k-3(1-3k)+1=0 \iff 11k=2 \iff k=\dfrac{2}{11}$.

$1-3k=1-3\times\dfrac{2}{11}=1-\dfrac{6}{11}=\dfrac{5}{11}$

Les coordonnées de H sont donc $\left(\dfrac{2}{11}\,;\,\dfrac{2}{11}\,;\,\dfrac{5}{11}\right)$.

c. $SH^2=\left(\dfrac{2}{11}-0\right)^2+\left(\dfrac{2}{11}-0\right)^2+\left(\dfrac{5}{11}-1\right)^2=\dfrac{4}{11^2}+\dfrac{4}{11^2}+\dfrac{36}{11^2}=\dfrac{44}{11^2}$ donc $SH=\dfrac{\sqrt{44}}{11}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$

La pyramide SPQCD a pour base le quadrilatère PQCD et pour hauteur SH ; son volume est donc

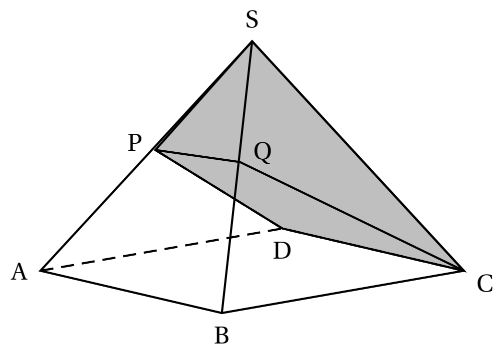
$V'=\dfrac{SH\times \text{aire(PQCD}}{3}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{11}}{11}\times\dfrac{3\sqrt{11}}{8}}{3}=\dfrac{\dfrac{6}{8}}{3}=\dfrac{1}{4}$ unité de volume.

Partie B : Partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.

Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :

« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.

La longueur OA est égale à une unité de longueur et à 12 cm. Donc l'unité de longueur vaut 12 cm et l'unité de volume vaut $12^3=1\,728$ cm^3.

Le volume de la pyramide SABCD est égal à 1 152 cm^3.

Le volume de la pyramide SPQCD est égal à 0,25 unité de volume, soit $0,25\times 1728=432$ cm^3.

Or $\dfrac{1\,152}{2}=576\neq 432$ donc le partage proposé par Fanny n'est pas équitable.

EXERCICE 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ.

1. Le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}797\,7$ ce qui veut dire que $P(D < 48) = 1-0{,}797\,7 = 0,2023$.
$D < 48 \iff D-50 < -2 \iff \dfrac{D-50}{\sigma} < -\dfrac{2}{\sigma}$
D'après le cours, si D suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{D-\mu}{\sigma}$ suit la loi nromale centrée réduite.
On cherche donc le réel β tel que $P(Z < \beta) = 0,2023$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.
À la calculatrice, on trouve $\beta \approx -0{,}833\,434\,0$ donc $\sigma \approx -\dfrac{2}{-0{,}833\,434\,0} \approx 2{,}399\,7$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\boldsymbol{\sigma} = 2,4$.

2. La probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois est $P(45 \leqslant D \leqslant 52)$.
On trouve à la calculatrice $0{,}779\,1$ comme valeur arrondie à 10^{-4} de la probabilité cherchée.

3. La probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est $P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 48+6)$:
$P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 54) = \dfrac{P\left((D \geqslant 54) \cap (D \geqslant 48)\right)}{P(D \geqslant 48)}$
$P\left((D \geqslant 54) \cap (D \geqslant 48)\right) = P(D \geqslant 54) \approx 0{,}047\,79$ et $P(D \geqslant 48) \approx 0{,}797\,67$
$P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 54) \approx \dfrac{0{,}047\,79}{0{,}797\,67} \approx 0{,}059\,9$
La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est $0{,}059\,9$.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Pour tous réels a et b strictement positifs : $P(a \leqslant T \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_a^b = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.

1. Le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0,03$ donc λ vérifie l'égalité $\displaystyle\int_0^{24} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0,03$ ou encore $1-\mathrm{e}^{-24\lambda} = 0,03$. On résout cette équation d'inconnue λ :

$$\begin{aligned} 1-\mathrm{e}^{-24\lambda} = 0,03 &\iff 0,97 = \mathrm{e}^{-24\lambda} \\ &\iff \ln(0,97) = -24\lambda \\ &\iff -\frac{\ln(0,97)}{24} = \lambda \end{aligned}$$

La valeur de λ telle que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0,03$ est $\lambda = -\dfrac{\ln(0,97)}{24}$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}001\,27$.

2. $P(24 \leqslant T \leqslant 48) = \text{e}^{-24\lambda} - \text{e}^{-48\lambda} \approx 0{,}029\,1$
La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois est 0,029 1.

3. **a.** • $P(T \leqslant b) = 1 - \text{e}^{-b\lambda} \implies P(T \geqslant b) = 1 - P(T \leqslant b) = 1 - \left(1 - \text{e}^{-b\lambda}\right) = \text{e}^{-b\lambda}$

• $h > 0 \implies (T \geqslant t+h) \cap (T \geqslant t) = (T \geqslant t+h)$

$$P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = \frac{P\left((T \geqslant t+h) \cap (T \geqslant t)\right)}{P(T \geqslant t)} = \frac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)} = \frac{\text{e}^{-(t+h)\lambda}}{\text{e}^{-t\lambda}} = \frac{\text{e}^{-t\lambda} \times \text{e}^{-h\lambda}}{\text{e}^{-t\lambda}} = \text{e}^{-h\lambda}$$
$$= P(T \geqslant h)$$

Donc la variable aléatoire T est sans vieillissement.

b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. La probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants est $P_{T\geqslant 36}(T \geqslant 36+12)$ qui est égal à $P(T \geqslant 12)$ d'après la question précédente.
$P(T \geqslant 12) = \text{e}^{-12\lambda} \approx 0{,}984\,9$
La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module électronique fonctionne encore 12 mois, sachant qu'il a déjà fonctionné 36 mois, est égale à 0,984 9.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants donc
$$P\left((D \geqslant 48) \cap (T \geqslant 48)\right) = P(D \geqslant 48) \times P(T \geqslant 48).$$
La probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois est
$$P\left((D \geqslant 48) \cap (T \geqslant 48)\right) = P(D \geqslant 48) \times P(T \geqslant 48) = 0{,}797\,7 \times \text{e}^{-48\lambda} \approx 0{,}750\,5$$

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.
$P(D \geqslant 48) = 0{,}797\,7$ donc $p = 0{,}797\,7$
$n = 300 \geqslant 30$; $np = 239{,}31 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 60{,}69 \geqslant 5$ donc on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :
$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}797\,7 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}797\,7(1-0{,}797\,7)}}{\sqrt{300}}\ ;\ 0{,}797\,7 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}797\,7(1-0{,}797\,7)}}{\sqrt{300}}\right]$$
$$\approx [0{,}752\,2\ ;\ 0{,}843\,2]$$
La fréquence de climatiseurs ayant encore leur module mécanique en fonctionnement après 4 ans (ou 48 mois) est $f = \dfrac{246}{300} = 0{,}82$.
Or $f \in I$ donc il n'y a pas lieu de remettre en cause le résultat donné par le service statistique.

EXERCICE 5 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\ldots 1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k.$$

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Le chiffre des unités de N_p est 1 donc N_p est impair donc il n'est pas divisible par 2.
   Et comme le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5, le nombre N_p n'est pas divisible par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
   a. $10 = 3 \times 3 + 1 \equiv 1 \mod 3$ et donc, pour tout j de $\mathbf{N}$, $10^j \equiv 1^j \mod 3$ donc $10^j \equiv 1 \mod 3$.
   b. N_p est la somme de p termes de la forme 10^j avec $j \in \mathbf{N}$, et pour tout j de $\mathbf{N}$, $10^j \equiv 1 \mod 3$.
   Donc $N_p \equiv p \mod 3$.
   c. On peut donc dire que N_p est divisible par 3 si et seulement si p est divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
   a. On complète le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ tel que $10^m \equiv a \mod 7$:

m	0	1	2	3	4	5	6
a	1	3	2	-1	-3	-2	1

   b. Soit p un entier naturel non nul.
   La division euclidienne de p par 6 permet d'écrire $p = 6q + r$ avec $q \in \mathbf{N}$ et $r \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$.
   $10^p = 10^{6q+r} = 10^{6q} \times 10^r = \left(10^6\right)^q \times 10^r$
   Or d'après la question précédente, $10^6 \equiv 1 \mod 7$ donc $\left(10^6\right)^q \equiv 1^q \mod 7$ et donc $10^{6q} \equiv 1 \mod 7$.
   On en déduit que $10^p \equiv 10^r \mod 7$.

   - Si p est un multiple de 6, alors $r = 0$ et $10^r = 10^0 \equiv 1 \mod 7$. Donc $10^p \equiv 1 \mod 7$.
   - Si p vérifie $10^p \equiv 1 \mod 7$, alors $10^r \equiv 1 \mod 7$ où r est le reste de la division de p par 6.
     D'après le tableau de la question précédente, la seule valeur possible de r dans $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$ pour que $10^r \equiv 1 \mod 7$ est $r = 0$. On en déduit que p est un multiple de 6.

   On a donc démontré que $10^p \equiv 1 \mod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.

   c. $N_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} 10^k = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{p-1}$ est la somme des p premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10.
   Donc $N_p = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} = 1 \times \dfrac{1 - 10^p}{1 - 10} = \dfrac{10^p - 1}{9}$.
   d.
   - Si 7 divise N_p, alors 7 divise tout multiple de N_p donc 7 divise $9N_p$.
   - On suppose que 7 divise $9N_p$.
     On sait que 7 et 9 sont premiers entre eux ; donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise N_p.

   On a démontré que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».

e. On a vu dans une question précédente que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$ ce qui équivaut à $9N_p = 10^p - 1$.

$$\begin{array}{rcll} N_p \text{ est divisible par 7} & \iff & 9N_p \text{ est divisible par 7} & \text{(question d.)}\\ & \iff & 9N_p \equiv 0 \mod 7 & \\ & \iff & 10^p - 1 \equiv 0 \mod 7 & \\ & \iff & 10^p \equiv 1 \mod 7 & \\ & \iff & p \text{ est multiple de 6} & \text{(question b.)} \end{array}$$

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \mod 10$.

a. On complète le tableau de congruences ci-dessous :

$n \equiv \ldots\ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots\ [10]$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b. D'après le tableau de la question précédente, pour avoir $n^2 \equiv 1 \mod 10$ il faut

- soit $n \equiv 1 \mod 10$ donc $n = 10m + 1$ avec $m \in \mathbf{N}$;
- soit $n \equiv 9 \mod 10$ donc $n = 10m' + 9$ ou $n = 10m - 1$ avec $m \in \mathbf{N}$.

c.
- Si $n = 10m + 1$, alors $n^2 = 100m^2 + 20m + 1 = 20\left(5m^2 + m\right) + 1 \equiv 1 \mod 20$;
- Si $n = 10m - 1$, alors $n^2 = 100m^2 - 20m + 1 = 20\left(5m^2 - m\right) + 1 \equiv 1 \mod 20$.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On sait que $N_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} 10^k$.

Pour tout $k \geqslant 2$, $10^k = 100 \times 10^{k-2} = 20\left(5 \times 10^{k-2}\right) \equiv 0 \mod 20$. Donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} 10^k \equiv 0 \mod 20$.

Donc $N_p \equiv 1 + 10 \mod 20$ c'est-à-dire $N_p \equiv 11 \mod 20$.

3. On a vu que $n^2 \equiv 1 \mod 10 \implies n^2 \equiv 1 \mod 20$; donc tout nombre qui a pour reste 1 dans la division par 10 et qui est un carré parfait, a pour reste 1 dans la division par 20.
Le nombre N_p a pour reste 1 dans la division par 10 et pour reste 11 dans la division par 20.
Donc N_p ne peut pas être le carré d'un entier.