Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E): \qquad z^4+2z^3-z-2=0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

Solution : $z=1$ est une solution évidente de (E)

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4+2z^3-z-2=\left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right).$$

Solution : $\left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right)=z^2+z^3+z^2+z^3+z^2+z-2z^2-2z-2=z^4+2z^3-z-2$
On a donc bien $\forall z\in\mathbb{C}$, $z^4+2z^3-z-2=\left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right)$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Solution : $(E)\iff\begin{cases}z^2+z-2=0\\ z^2+z+1=0\end{cases}$

Résolution de $z^2+z-2=0$:

$z^2+z-2=(z-1)(z+2)$ d'où $z^2+z-2=0\iff\begin{cases}z=1\\ ou\\ z=-2\end{cases}$

Résolution de $z^2+z+1=0$:
$\Delta=b^2-4ac=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2<0$ on en déduit que l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$\begin{cases}z_1=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2ex] z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Finalement $(E)\iff z\in\left\{-2\,;\,1\,;\,-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Solution : On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct

Soit $A(-2)$, $B\left(-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(1)$ et $D\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AC}\,(3\mathrm{i})$ et $\overrightarrow{DB}\,(1)$ donc $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{DB}\,(1)=\overrightarrow{v}$

on en déduit que (AC) et (BD) sont perpendiculaires

$\dfrac{z_A+z_C}{2}=-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{z_B+z_D}{2}=-\dfrac{1}{2}$, on en déduit que $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu

Finalement $ABCD$ est un losange car ses diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires.

Exercice 2 **4 points**

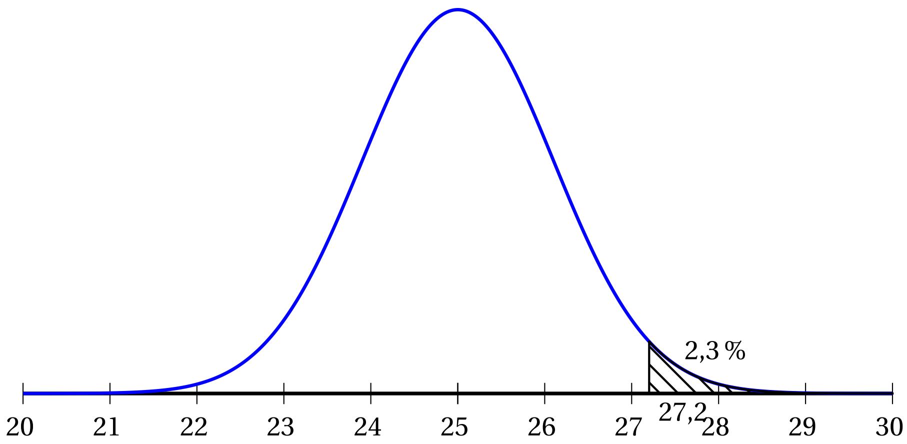
Commun à tous les candidats

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22,8 µm et 27,2 µm.

La fonction de densité de probabilité de X est représentée ci-dessous. On a pu déterminer que $P(X > 27{,}2) = 0{,}023$.



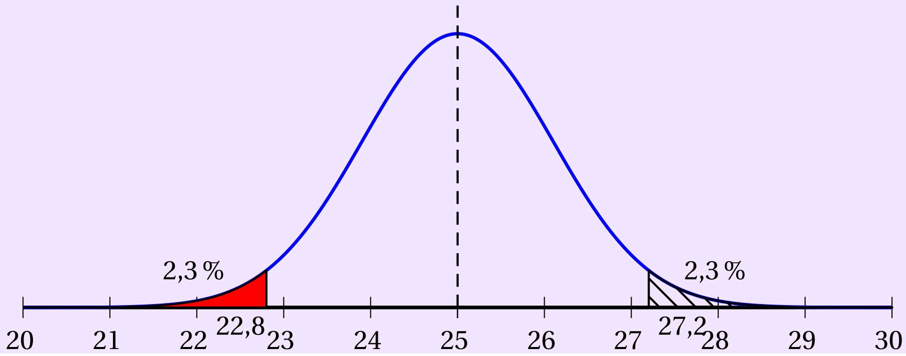
1. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.

Solution : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(25\,;\,\sigma_1^2\right)$ donc la courbe de la fonction densité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 25$

on en déduit $P(X > 27{,}2) = P(X > 25 + 2{,}2) = P(25 - 2{,}2 < X) = P(22{,}8 < X) = 0{,}023$

on a alors $P(22{,}8 < X < 27{,}2) = 1 - (P(22{,}8 < X) + P(X > 27{,}2)) = 0{,}954$

La probabilité qu'une pièce soit conforme est donc de 0,954



b. Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.

Solution : On sait que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$

Ici on a donc $2\sigma_1 \approx 2{,}2$ soit $\sigma_1 \approx 1{,}1$ à 10^{-1} près

c. Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à 10^{-3}.

Solution : On cherche $P_{X\in[22{,}8\,;\,27{,}2]}(X < 24)$

$$P_{X\in[22{,}8\,;\,27{,}2]}(X \in [0\,;\,24]) = \frac{P(X \in [0\,;\,24] \cap [22{,}8\,;\,27{,}2])}{P(X \in [22{,}8\,;\,27{,}2])} = \frac{P(22{,}8 < X < 24)}{0{,}924} \approx 0{,}172$$

2. Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes.

La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ μm et d'écart-type σ_2.

a. En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.

Solution : $\sigma_2 < \sigma_1$ car la probabilité qu'un pièce soit conforme est supérieure dans le deuxième cas, ce qui signifie que la dispersion est moins grande autour de l'espérance.

b. Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes.

Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs?

Solution : Ici on répète $n = 500$ fois de manière indépendante le test d'une pièce

La proportion annoncée de pièces conformes est $p = 0{,}98$.

On a $n \geqslant 30$, $np = 490 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 10 \geqslant 5$.

On peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique.

On peut affirmer au seuil de 95% que la fréquence observée de pièces conformes devrait appartenir à l'intervalle $I_n = \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

$p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}9677$ et $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}9923$

la fréquence observée est $f = \dfrac{485}{500} = 0{,}97 \in I_n$.

On peut donc pas rejeter l'affirmation au seuil de 95%.

Exercice 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

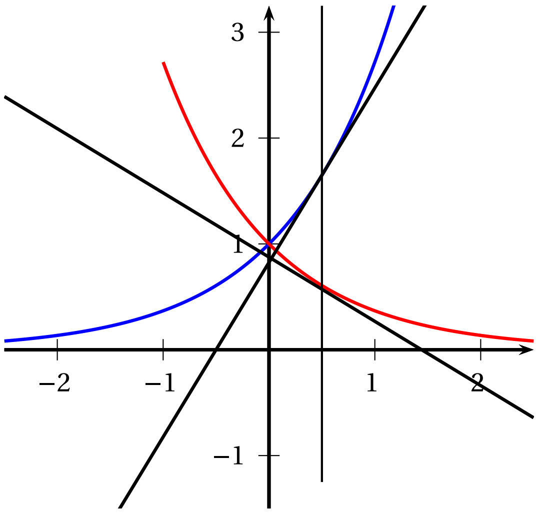
$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a.

La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	−3	2
3	−2,5	2
4	−2	2
5	−1,5	2
6	−1	2
7	−0,5	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.

Solution : f et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f'(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en M d'abscisse a a pour coefficient directeur $m_1 = f'(a) = \mathrm{e}^{a}$

La tangente à $\mathscr{C}_g$ en N d'abscisse a a pour coefficient directeur $m_2 = g'(a) = -\mathrm{e}^{-a}$

$m_1 \times m_2 = -\mathrm{e}^{a-a} = -1$ et le repère est orthonormé, on en déduit que les tangentes sont perpendiculaires.

remarque : si on ne connaît pas cette propriété on peut passer par les vecteurs directeurs de ces deux droites : $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{e}^{a}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{e}^{-a}\end{pmatrix}$ puis montrer que leur produit scalaire est nul (toujours parce que l'on se situe dans un repère orthonormé)

2. **a.** Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

Solution : D'après les données du logiciel, il semblerait que la longueur PQ soit constante

b. Démontrer cette conjecture.

Solution : Δ_f, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

soit $\Delta_f : y = \mathrm{e}^{a}x + (1-a)\mathrm{e}^{a}$

Δ_g, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en N d'abscisse a a pour équation $y = g'(a)(x-a) + g(a)$

soit $\Delta_g : y = -\mathrm{e}^{-a}x + (1+a)\mathrm{e}^{-a}$

$\mathrm{P}(x_{_P}\,;0)$ avec $x_{_P}$ tel que $\quad \mathrm{e}^{a}x_{_P} + (1-a)\mathrm{e}^{a} = 0 \iff x_{_P} = a-1$

$\mathrm{Q}(x_{_Q}\,;0)$ avec $x_{_Q}$ tel que $\quad -\mathrm{e}^{-a}x_{_Q} + (1+a)\mathrm{e}^{-a} = 0 \iff x_{_Q} = 1+a$

On a alors $\mathrm{PQ} = 1 + a - (a-1) = 2$

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \quad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.

Solution : f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$

$$f = \frac{u}{v} \Longrightarrow f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\forall x > 0\,,\; f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$x^2 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1 - \ln(x))$, on en déduit les variations de f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ donc par opération sur les limites on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (limite de cours)

2. Déterminer son maximum.

Solution : $f(x)$ admet $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ pour maximum sur $]0\,;\,+\infty[$

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ notée α_n.

Solution : $f(1) = 0$ et $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \geqslant \dfrac{1}{3}$

sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$, f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0\,;\,f(\mathrm{e})]$ or pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{n} \in [0\,;\,f(\mathrm{e})]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique α_n sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$

2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a. Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

Solution : D'après le graphique, la suite (α_n) semble décroissante

b. Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_n)$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

Solution :
Pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$
or pour tout entier $n \geqslant 3$, $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ soit $f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$
On en déduit donc que (α_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

Solution : (α_n) est décroissante et minorée par 1 car $\alpha_n \in [1\,;\,\mathrm{e}]$
On en déduit que (α_n) est convergente vers $\ell \geqslant 1$

3. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n.$$

a. On admet que la suite $\left(\beta_n\right)$ est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

Solution : $f\left(\beta_n\right) = \dfrac{1}{n} \iff \dfrac{\ln\left(\beta_n\right)}{\beta_n} = \dfrac{1}{n} \iff \ln\left(\beta_n\right) = \dfrac{\beta_n}{n}$
de même $\ln\left(\beta_3\right) = \dfrac{\beta_3}{3}$
on a admis que $\left(\beta_3\right)$ est croissante, on en déduit donc que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\ln\left(\beta_n\right) \geqslant \ln\left(\beta_3\right)$ ce qui entraîne $\dfrac{\beta_n}{n} \geqslant \dfrac{\beta_3}{3}$
Finalement on a bien pour tout entier $n \geqslant 3$, $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$

b. En déduire la limite de la suite $\left(\beta_n\right)$.

Solution : $\beta_3 > 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\frac{\beta_3}{3} = +\infty$
donc par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

Solution : On procède par récurrence

initialisation : $u_0 = 3$ et $9 \times 2^0 - 6 = 9 - 6 = 3$ donc l'égalité est vérifiée au rang $n = 0$

hérédité : Soit n un entier naturel tel que l'égalité $u_n = 9 \times 2^n - 6$ soit vérifiée

alors on a $u_{n+1} = 2u_n + 6 = 2(9 \times 2^n - 6) + 6 = 9 \times 2^{n+1} - 6$, l'égalité est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$

or l'égalité est vérifiée au rang $n = 0$ donc par le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 9 \times 2^n - 6$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est divisible par 6.

Solution : Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 9 \times 2^n - 6 = 18 \times 2^{n-1} - 6 = 6 \times \left(3 \times 2^{n-1} - 1\right)$ or $\left(3 \times 2^{n-1} - 1\right) \in \mathbb{N}$ car $(n-1) \in \mathbb{N}$ on en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Solution : $u_6 = 9 \times 2^6 - 6 = 570$ et $v_6 = \dfrac{570}{6} = 95$ qui n'est pas un nombre premier

L'affirmation est donc fausse

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - 2v_n = \dfrac{u_{n+1}}{6} - \dfrac{2u_n}{6} = \dfrac{2u_n + 6 - 2u_n}{6} = 1$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

Solution : On a trouvé deux entiers relatifs $a = 1$ et $b = -2$ tels que $av_{n+1} + bv_n = 1$ on peut alors conclure d'après le théorème de Bezout que v_{n+1} et v_n sont premiers entre eux

c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 6v_n$ donc PGCD $(u_n\ ;\ u_{n+1}) =$ PGCD $(6v_n\ ;\ 6v_{n+1}) = 6 \times$ PGCD $(v_n\ ;\ v_{n+1}) = 6$

5. **a.** Vérifier que $2^4 \equiv 1\ [5]$.

Solution : $2^4 = 16 = 15 + 1 \equiv 1[5]$

b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

Solution : Si $n = 4k + 2$ alors $u_n = 9 \times 2^{4k+2} - 6 = 36 \times \left(2^4\right)^k - 6$

$$\begin{aligned} 2^4 \equiv 1[5] &\Longrightarrow \left(2^4\right)^k \equiv 1[5] \\ &\Longrightarrow 36 \times \left(2^4\right)^k \equiv 36[5] \\ &\Longrightarrow 36 \times \left(2^4\right)^k - 6 \equiv 30[5] \equiv 0[5] \end{aligned}$$

Donc si $n = 4k + 2$ alors u_n est divisible par 5

c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?
Justifier.

Solution : Tout entier naturel n s'écrit $n = 4k$ ou $n = 4k+1$ ou $n = 4k+2$ ou $n = 4k+3$ avec k un entier naturel
de la même manière que précédemment on montre que

- ✓ Si $n = 4k$ alors $u_n = 9 \times 2^{4k} - 6 \equiv 3[5]$
- ✓ Si $n = 4k+1$ alors $u_n = 9 \times 2^{4k+1} - 6 = 18 \times 2^{4k} - 6 \equiv 2[5]$
- ✓ Si $n = 4k+3$ alors $u_n = 9 \times 2^{4k+3} - 6 = 72 \times 2^{4k} - 6 \equiv 1[5]$

donc si $n \neq 4k+2$, u_n n'est pas divisible par 5

Exercice 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $\mathrm{A}(-1\,;\,2\,;\,0)$, $\mathrm{B}(1;2;4)$ et $\mathrm{C}(-1\,;\,1\,;\,1)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Solution : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

il n'existe pas de réel k non nul tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires ce qui entraîne que les points A, B et C ne sont pas alignés

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Solution : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0+0+4 = 4$

c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$, arrondie au degré.

Solution : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = 4$

on a alors $\cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = \dfrac{4}{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}} = \dfrac{4}{\sqrt{20}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{40}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

on en déduit $\widehat{\mathrm{BAC}} \approx 51°$

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Solution : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4+0-4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0+1-1 = 0$
$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on en déduit que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC)

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Solution : (ABC) : $2x - y - z + d = 0$ car $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (ABC)

de plus A(-1; 2; 0) $\in$ (ABC), on en déduit $d = 4$
Finalement (ABC) $2x - y - z + 4 = 0$

3. Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

Solution : $\mathscr{P}_2$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $\mathscr{P}_2 : x - 2z + d = 0$

or $\text{O} \in \mathscr{P}_2$, on en déduit que $d = 0$

Finalement on a bien $\mathscr{P}_2 : x = 2z$

b. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

Solution : $\mathscr{P}_1$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}_2$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont évidemment pas colinéaires (il suffit de regarder l'ordonnée)

les plans ne sont donc pas parallèles, ils sont nécessairement sécants

c. Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & -4t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & t \end{array}\right.$$

Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Solution :

méthode 1 : $\mathscr{D}$ est de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ on en déduit que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$

de plus M(0; -3; 0) appartient à $\mathscr{D}$, on montre aisément que ce point appartient aux deux plans à la fois

Finalement la droite $\mathscr{D}$ est parallèle aux deux plans et passe par un point commun aux deux plans, on en déduit que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{D}$

méthode 2 : on cherche à résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} 3x + y - 2z + 3 = 0 \\ x \quad\; - 2z \quad\; = 0 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y - 2z + 3 = 0 \\ x \quad\; - 2z \quad\; = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 2z \\ y = -4z - 3 \end{array}\right.$$

en posant $z = t$ on obtient la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ donc on a bien $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{D}$

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Solution : $\text{I}(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un unique réel t tel que $\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{array}\right.$

$\text{I}(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC})$ si et seulement si $2x - y - z + 4 = 0$

on cherche donc t tel que $2(2t) - (-4t - 3) - t + 4 = 0 \iff t = -1$

Finalement $\mathscr{D}$ coupe (ABC) en $\text{I}(-2\,;\,1\,;\,-1)$.